

**Os Atores
(Des)conhecidos
dos Cálculos**

Diego Gondim
Raquel Anna Sapunaru

Colaboradores:
Hiary Rabelo de Almeida
Filadelfo Cardoso Santos
Nárlen Advíncula

Os Atores (Des)conhecidos dos Cálculos



Diagramação e capa: Lucas Fontella Margoni
Fotografia de capa: Nadia Maria
Figuras Geométricas: Hiany Rabelo de Almeida
Triângulos: Filadelfo Cardoso Santos
Revisão: Nárlen Advíncula

O padrão ortográfico e o sistema de citações e referências bibliográficas são prerrogativas de cada autor. Da mesma forma, o conteúdo de cada capítulo é de inteira e exclusiva responsabilidade de seu respectivo autor.



Todos os livros publicados pela Editora Fi estão sob os direitos da [Creative Commons 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pt_BR)
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pt_BR



Associação Brasileira de Editores Científicos

<http://www.abecbrasil.org.br>

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

GONDIM, Diego de Matos; SAPUNARU, Raquel Anna.

Os Atores (Des)conhecidos dos Cálculos. [recurso eletrônico] / Diego de Matos Gondim; Raquel Anna Sapunaru -- Porto Alegre, RS: Editora Fi, 2016.

162 p.

ISBN - 978-85-5696-058-0

Disponível em: <http://www.editorafi.org>

1. Filosofia da matemática. 2. Geometria. 3. René Descartes. 4. Cálculo I. Título.

CDD: 516

Índices para catálogo sistemático:

1. Geometria analítica 516

AGRADECIMENTOS

*Ao meu marido Filadelfo,
à Maria Thereza Lima e
à Biblioteca do IMPA*

Raquel Anna Sapunaru

*À minha família
(avó – in memoriam; avó – Iracema; mãe –
Vanusa; irmão – Victor;
e alguns amigos – eles se reconhecerão aqui)*

Diego Gondim

SOBRE OS AUTORES E COLABORADORES

Diego Gondim: Graduado em Licenciatura Plena em Matemática pelo Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG) e mestrando em Educação Matemática na Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho (Unesp - Rio Claro). Membro do Grupo de Estudo e Pesquisa em Etnomatemática (GEPETno) do Departamento de Educação Matemática (Unesp - Rio Claro); do Grupo de Estudos e Pesquisas em Etnomatemática (GPEM) da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de São Paulo (USP); do Grupo de Estudos e Pesquisas Subjetividade e Educação (GEPSEd) da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo (USP); do Grupo de Estudos e Pesquisas I-Mago: laboratório da imagem, experiência e criação do Departamento de Educação (Unesp - Rio Claro) e do Núcleo de Filosofia e História da Física-matemática (NUFIHM) do Instituto de Ciência e Tecnologia (ICT) da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM). Atualmente, trabalha junto à área de Educação Matemática, em História/Filosofia da Matemática e da Educação Matemática nos seguintes temas: Etnomatemática, Filosofia da Educação Matemática e História da Matemática.

Raquel Anna Sapunaru: Graduada Licenciatura Plena e em Física pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), mestrado e doutorado em Filosofia pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), com ênfase em Filosofia da Física e História da Filosofia. Presentemente, é Professora Adjunto no Instituto de Ciência e Tecnologia (ICT) da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM), onde coordena

o Núcleo de Filosofia e História da Física-matemática (NUFIHM), desenvolvendo projetos em quatro linhas de pesquisa distintas: 1) Ensino, História e Filosofia da Física e da Filosofia da Matemática; 2) Filosofia e Epistemologia da Educação Matemática; 3) História da Ciência e da Tecnologia e 4) História da Educação Matemática, Científica e Tecnológica.

Hiany Rabelo de Almeida: Bacharelada em Ciência e Tecnologia na Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM).

Filadelfo Cardoso Santos: Bacharel em Física pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), mestre em Física pelo Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) e doutor em Física pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Atualmente, é Professor Adjunto no Instituto de Ciência e Tecnologia (ICT) da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM). Tem experiência na área de Astronomia, com ênfase em Astrofísica Estelar. Atuando principalmente nos seguintes temas: teoria de campo, efeito Casimir.

Nárlle Advíncula: Graduada em Letras, com ênfase em Licenciatura em Língua Portuguesa e Língua Inglesa, mestre em Letras, com ênfase em Estudos da Linguagem pela Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Especializada em Metodologia do Ensino da Língua Portuguesa pela Faculdade Cidade de João Pinheiro (FCJP). Atua como professora de Língua Portuguesa, Língua Inglesa e Redação no Colégio João Paulo II, Sistema Objetivo de Ensino em Itamarandiba (MG). Revisora de textos. Atualmente, desenvolve o “Projeto Jovens Escritores na Escola, do qual é idealizadora, cujo objetivo é estimular a produção literária de jovens estudantes através da publicação de livros.

Sumário

PREFÁCIO	13
CAPÍTULO 1	16
Introdução, uma abertura “intersséculos”	
CAPÍTULO 2	44
Território-coveiro, ele(s), nós, você(s): Descartes, Fermat, Hudde, Sluse, Leibniz, Newton e outros coadjuvantes dos cálculos	
CAPÍTULO 3	84
Atravessando territórios, entre imaginário e real: (des)conhecendo Leibniz	
CAPÍTULO 4	109
Atravessando territórios, o sobressalto do olho: (des)conhecendo Newton	
CAPÍTULO 5	131
Para não concluir: uma abertura “inter-séculos”	
A MATEMÁTICA QUE INSPIRA	149
BIBLIOGRAFIAS E REFERÊNCIAS	150

PREFÁCIO

É incontestável que os Cálculos Diferencial e Integral são os instrumentos matemáticos essenciais para a ciência e a tecnologia modernas. É também incontestável que a disputa, polarizada em Isaac Newton e Gottfried Wilhelm von Leibniz, sobre quem inventou o Cálculo Diferencial e Integral é a maior controvérsia na História da Ciência. Naturalmente, o tema de sua invenção tornou-se dominante no cenário acadêmico e mesmo no imaginário popular. Milhares de livros, de artigos e de textos de divulgação têm sido publicados sobre o tema.

Diego Gondim e Raquel Anna Sapunaru decidiram escrever um texto muito original sobre o tema. O tratamento é original no seu estilo e nas suas fontes. Os autores não se limitam a relatar o que este disse, o que aquele considerou, o que um terceiro objetou. Fazem uma leitura crítica de vários matemáticos e de filósofos, contemporâneos de Newton e de Leibniz, em que historiadores consagrados reconhecem como tendo sido protagonistas da invenção dos Cálculos Diferencial e Integral. São nomes reconhecidos, muitos deles menos lembrados, que contribuíram ou contestaram as ideias sobre os Cálculos Diferencial e Integral que estavam nascendo na época. Diego e Raquel não se limitam a mencionar o pensamento desses autores. Vão mais além, num processo que poderíamos chamar de garimpagem histórica, vão à procura de contemporâneos negligenciados, ignorados e até recusados por reconhecidos historiadores da matemática, e relatam algumas das observações e contribuições desses negligenciados para a emergência do magnífico construto matemático que são os Cálculos Diferencial e Integral.

A narrativa de Diego e de Raquel é muito especial. Eles encantam o leitor, num estilo fluente e instigante, salpicado de ironias e de humor. Muito interessante é a metáfora do coveiro. Eles comparam sua busca de contato com mortos, com nomes não escritos, não assinados, à missão de um coveiro. E se

dizem fascinados por isso. E nas suas narrativas fascinam o leitor.

Muito difícil prefaciarmos um livro tão original quanto este. Diego e Raquel citam Huyghens e dialogam com Clarice Lispector. E Clarice se incorpora às suas missões de coveiro. Descrevem como, na sala de aula, discutem poesia e contagiam os alunos bem jovens na ação de coveiro. Levam seus alunos a questionarem a transição da Idade Média para a Idade Moderna. E estendem esse contágio aos leitores, discutindo questões globais na transição da Idade Média para a Moderna. Praticam, nas suas narrativas um exercício transdisciplinar exemplar, embora não mencionem isso. Recorrem às suas experiências pessoais, como beber pela primeira vez, para motivarem o leitor sobre reflexões teóricas sobre experiência. E prosseguem dialogando com Descartes e garimpando em bibliotecas. Fermat, Viète e Pascal surgem em cena, bem como seus contemporâneos, cujos nomes são pouco lembrados nos livros de História da Matemática, como Slude, Oldenburg e Hudde.

Diego e Raquel revelam seus processos de mergulhar, como coveiro, no mundo de outros. Leem Descartes, deitam-se em uma rede e refletem conversando com o leitor, que eles logo chamam de amigo. E confessam que não conseguiriam viver sem esse amigo. Num certo momento, o coveiro sai do cemitério e visita a biblioteca. Encontra Gabriel Garcia Marques e tem uma boa conversa com José Arcádio Buendía. Visitam, com frequência, o cemitério, dialogam com Descartes e Fermat e explicam, para um garoto que encontrou na saída do cemitério, o que eles diriam em linguagem com códigos e notações atuais. Para entender o que eles diriam, pedem ajuda de contemporâneos como Hudde, Sluse e Roberval.

Começam um novo capítulo descrevendo uma experiência de caminhar com a cabeça na lua e encontrar um velho, quase centenário, Maurice Blanchot. Trocam poucas palavras com ele, que nunca mais aparece no livro. Desafiam o leitor. Quem será esse personagem? E encontra-se aí um elo

com a tentativa de Diego e de Raquel se aproximarem de Clarice Lispector, que os acompanham em todo este livro. Muiíssimo original esse encontro com Blanchot. E voltam ao cemitério. No trabalho de coveiro, encontram Cavalieri e suas cartas a Galileu, em que a teoria dos indivisíveis está esboçada. E, nessa busca, procurando por Leibniz, conhecem Van Heuraet, discípulo de Van Schooten, procurando retificar curvas.

Confessam que têm medo de enlouquecer com o olhar ameaçador do leitor, dialogam com Edgar Allan Poe, Gilles Deleuze e chega a Isaac Newton. O encontro com Newton envolve Roberval, Mercator, Barrow e tantos outros.

No capítulo de conclusão, os autores fazem uma análise abrangente, notável, sobre o quanto o mundo mudou após a invenção dos Cálculos. Um novo pensar passou a dominar a humanidade, as instituições, o fazer dos povos e se tornou instrumento de poder. Resolvem então matar o coveiro, num ritual que termina com a Aula de Matemática, de Tom Jobim.

Prefaciá-lo foi um grande desafio. Deliciei-me com sua leitura. A metáfora do coveiro ressuscita atores esquecidos na História do Cálculo. O livro não é apenas uma contribuição para a História da Matemática e das Ciências e para a História do Pensamento Moderno. O livro vai mais além. É um ensaio literário, uma discussão exemplar sobre o significado de experiência e sobre como o imaginário domina nosso pensar.

São Paulo, agosto de 2016.

Ubiratan D'Ambrosio

CAPÍTULO 1

Introdução, uma abertura “intersséculos”

Sobre o livro ou algumas revelações, tenho algo a dizer. Caro leitor, antes de qualquer coisa, quero dizer a você que este não é um livro de história. Uma história daquelas que todo mundo conta. Daquelas que se ouve por aí. Imagino que, nestas primeiras linhas, você já esteja desapontado com esta revelação, mas preciso ser sincero contigo. O que estou a compor são apenas linhas tortas de uma história torta que ainda não foi contada.¹ São rabiscos, rabiscos tortos. Como aqueles de uma criança ao pegar, pela primeira vez, um lápis colorido. Daqueles que fogem das margens. Que não possuem sequer uma simetria aos olhos de um adulto. Te digo uma coisa: se tens mesmo o desejo de ler-me, olhe para esses traços a esmo como um pai olha para o primeiro desenho de seu filho. Se não for capaz de fazer assim, feche este livro agora. Ponha-te em pé e não perca o seu tempo com as palavras de alguém que só quer fazer pulsar vidas breves de personagens que não deixaram seus rastros tão visíveis. É preciso, então, que você tenha a consciência de que, por não ser uma *história*, tenho a liberdade de escrever este livro como eu quero. Se os traços são feios ou bonitos, não me importa. Importa-me, apenas, falar de uma torta realidade. Isto é, de matemáticos que, esquecidos pela história, contribuíram para o que hoje você conhece como Cálculo Diferencial e Integral. Ou seja, estou a compor páginas de recortes históricos que foram recortados. Recortados dos livros

¹ Quando digo que a história ainda não foi contada, refiro-me ao meu ato de contar. Conto com minhas palavras tortas e ela se torna uma não-história contada, por ela inaugurar a mim mesmo.

didáticos. Recortados da história contada, escrita. História dos heróis. Mas, ao visitar o cemitério, vi escrito em suas lápides, com traços fracos, esquecidos, os seus nomes. Seus cálculos.

Além de este não ser um livro de história, quero revelar, também, a você – meu leitor – que não tenho a intenção de que esta seja uma introdução, isto é, um começo. Um início. Mas, apenas, uma abertura. Uma entrada. Um rasgar de palavras que dê espaço ao inaugurar desta própria escrita de ‘mim’ mesmo. Desta não história. De você – leitor. Portanto, se você – ainda intrigado – continua a ler este livro, faça-lhe um pedido como o que Clarice Lispector fizera, por muito, aos seus leitores, qual seja: leia-me com teu corpo. Movimente-se junto a essa escrita. Uma escrita torta, fora da margens. Com algumas palavras vermelhas, outras azuis, roxas, rosas... rosas. Como as que deixam em tumbas. Hora poéticas, belas, outrora duras. É, portanto, uma antologia de existências que se inauguram todas as vezes que me ponho a escrever sobre eles.

Nesta antologia de existências, nessa exploração, nesse ato de dar língua aos ecos não ouvidos e de inaugurá-los, inauguro-me junto a eles. A elas. Isto é, este livro, esta abertura está sendo compilada junto à maneira que estou a me estranhar nesse cemitério. Sou, também, um estrangeiro nele, pois explorar o que está morto é estranho. Estar no cemitério é estranho. Sinto-me um coveiro. Um estrangeiro de mim mesmo. E isso é magnífico. Ao mesmo tempo em que me estranho sendo um estrangeiro de mim mesmo, – um coveiro – sinto-me mergulhado, às vezes, afogado, numa aventura sem igual. É que esse negócio de ser coveiro mexeu comigo. Ser eu já não faz mais sentido, pois me afeiçoei pela profissão de coveiro. Algo nela me intriga. Parece que é esse contato com os mortos. Com a morte. Com nomes não escritos. Não assinados. Com histórias não contadas. Com cartas não lidas. Cartas de parentes,

amigos e outros deixados em suas tumbas. Confesso que, em horas, não me sinto mais nem coveiro. Pois, às vezes, já me sinto eles. Um morto também.

Nesse cemitério, junto às tumbas e tudo que nelas existem – ossos, cabelos, flores, mau cheiro, dentes, maltrapilhos etc., percebo que, no século XVII, esses mortos estavam a se preocupar com as mesmas coisas, isto é, com os problemas sobre as curvas, suas equações algébricas, a determinação das áreas que se encontram em regiões delimitadas por elas, a construção da tangente e sua inversa, os infinitesimais, os indivisíveis, bem como o cálculo de seus valores máximos e mínimos. De maneira inusitada, vejo que Huygens concorda comigo. Digo isso porque sua ideia encontra-se em perfeita sintonia com a minha, quando ele divaga:

Os matemáticos nunca terão tempo suficiente para ler todas as descobertas da Geometria (uma quantidade que está aumentando, dia após dia, e parece que nessa era científica, está se desenvolvendo em direção a uma proporção gigantesca) se elas continuam ser apresentadas na forma rigorosa dos antigos (HUYGENS, 1888, p. 337).

Está vendo o quanto isso é estranho para mim? Venho sendo mesmo um estrangeiro de mim mesmo. Eu, coveiro que sou, estou a explorar todas essas coisas. É que parece que fui contaminado pela mesma aflição, rabiscadas nas cartas desses matemáticos, de explorar essas ideias. Os portões do cemitério ficam constantemente abertos, escancarados, e eu, de vez em quando, até vou embora. Eu preciso ir embora. É como se fizesse parte do ritual. Mas eu volto, volto correndo. Com uma aflição enorme, mas também com um ar de – caramba, que aventura estou a viver.

Falar desse sentimento me traz à memória um pequeno conto que ouvi de Clarice Lispector, *Felicidade Clandestina*. Às vezes, sinto-me como aquela pequena e loura menina que dia após dia ia à porta da casa da filha do dono da livraria à espera do livro prometido. Ia, sem sequer faltar um dia, guiada pela promessa. E lá estava a pequena garota, todos os dias, com o coração batendo, aflita à espera de, então, sair com o livro. Não quero ficar dando muitas voltas, mas preciso dizer que, como coveiro, sinto-me como essa loura menina. É que quando saio do cemitério, não saio como entro. Entro correndo. Não, pulando. Como aquela garotinha. É um sentimento difícil de escrever. Mas entro pulando, guiado pela promessa de que mais descobertas matemáticas e de matemáticos possuirei. É engraçado. Estranho. Mas quando saio me vejo novamente como a loura pequenina. Coração acelerado. Já não saio pulando, mas andando. Devagar. Bem devagarinho, abraçado a cartas, a pedaços de papel carregados de produções matemáticas que ensejam o cenário da produção do Cálculo Diferencial e Integral do século XVII. Ao sair, já não sou mais o coveiro, mas uma menininha de cabelos louros como a do conto de Clarice. E, ao chegar em casa, fico estonteado. Finjo que não tenho as cartas, que não tenho os pedaços da história. Finjo que não os tenho para que em algum momento eu, de repente, os encontre e comece a lê-los. Às vezes, finjo que os leio.

Em um dia desses, eu, já porta adentro do cemitério, estava a limpar algumas lápides, tumbas, a escorar outras covas. Fazendo o serviço de coveiro. O meu serviço. Foi então que descobri que aqueles problemas matemáticos escritos nas linhas anteriores tiveram, com louvor, um *fim*. Um fim que inaugurou o acontecimento do que conhecemos como Cálculo Diferencial e Integral. Este fim foi imputado a duas existências, mas não são àquelas que eu vinha falando. Trata-se de Leibniz e Newton. Ambos chegaram aos mesmos resultados, ou quase os

mesmos, utilizando métodos e motivações diferentes. Bom, eu lhe disse que esta introdução não era um começo. Ou um resumo geral do livro, pois ela se inaugura junto ao próprio livro. Ou seja, ainda não descobri nada sobre estas existências. Por isso, ela é apenas uma abertura. Talvez seja a abertura dos próprios portões do cemitério. Um convite a conviver, comigo, no cemitério.

Nesta abertura, leigo que ainda sou, sou tentado a dizer que o que há de certo e em comum nas descobertas de Leibniz e de Newton é que ambos são responsáveis pela base analítica da matemática moderna, pelo enorme desenvolvimento de outras disciplinas que dependem do cálculo, como a física, e que eles foram atravessados pelas ideias de outros matemáticos de seu próprio século, começando por Descartes e Fermat. Nessa afirmação, é preciso que você, meu leitor, tenha o cuidado para não cair na mesma armadilha que estou suscetível a cair, qual seja: seria, apenas, Leibniz e Newton os únicos responsáveis pelo Cálculo Diferencial e Integral? A tentativa aqui é apresentar a você que esses atores construíram sua peça coadjuvando com outros atores.

Não posso negar que em meus momentos de enlevo, aqueles que eu conseguia ler algumas linhas dos rabiscos encontrados, descobri que, de algum modo, os problemas relativos às curvas, suas equações algébricas, a determinação de suas áreas, a construção da tangente e sua inversa, os infinitesimais, os indivisíveis e calcular seus valores máximos e mínimos foram sendo solucionados desde a antiguidade, paulatinamente. Contudo, até o século XVII, a matemática reunia, concretamente falando, somente algumas soluções dispersas para tais questões. A análise ainda não existia, a álgebra era quase inexistente e nem sequer se pensava em aplicar a aritmética à geometria. *O que percebo claramente é que a matemática carecia de uma solução geral para seus problemas primordiais, pois, do contrário, seria*

praticamente inexecutável dar um passo além da qual ela se encontrava.

São existências e contribuições que venho descobrindo a cada ida ao cemitério. Dia após dia, venho sendo estrangeiro de mim mesmo. Perceba você, leitor amigo, que já se enovelou com toda essa não história, a cada momento, no ato da escrita e de seus efeitos, não sou mais eu. Sou outros. É que a loura garotinha freme em minha pele. Em meus ossos. Treme minhas pupilas. E aquela sensação de ir pulando para o cemitério, movido pela promessa da descoberta e sair andando a passos lentos, com um bocado de coisas na cabeça e outras seguradas pelas mãos e comprimidas no peito, já virou um ritual. Já me sinto morto. Já me sinto ela, a menininha. Coveiro que sou. Morto como eles, sou também eles. Todas essas descobertas já fazem parte daquilo que não sou. Do que estou sendo. Ao escrever, inauguro essa não história. Inauguro a mim mesmo. É que *é curiosa a sensação de escrever. Ao escrever, não penso nem no leitor, nem em mim: nessa hora – mas só de mim – sou as palavras propriamente ditas.* Perco-me em tudo isso e aquela estupenda aventura acontece nesse ato de se perder, pois, ao perder-me, encontro-me. Desencontro-me. Encontro com eles. Com ela. Comigo mesmo. Torno-me ela, eles, as palavras propriamente ditas...

Nesses encontros e desencontros, realizando meu trabalho de coveiro, em algumas lápides de existências muito antigas, aquelas das quais eu vinha falando, descobri que, mesmo sendo a participação dos antigos insuficiente para fazer frente aos problemas que vinham sendo colocados no contexto do século XVII, é importante ressaltar que alguns matemáticos souberam aproveitar seus escritos e deles extrair alguns importantes subsídios. Essas contribuições representaram uma parcela importante no estabelecimento de uma solução geral para todo e qualquer problema que surgisse concernente às curvas, suas

equações algébricas, à determinação de suas áreas, à construção da tangente e sua inversa, aos infinitesimais, aos indivisíveis e a calcular os valores máximos e mínimos. Essas soluções eram alcançadas por matemáticos² que se esforçavam em aplicar a matemática, deixada por Euclides, Arquimedes e Apolônio, em problemas da agrimensura, mecânica, artes e outras.

São esses matemáticos que chamo de existências. São os escritos desses matemáticos que me fazem ir dia após dia ao cemitério. Que fazem minhas pernas pularem. Andar devagarinho. Meu coração saltar. Meu corpo estontear. Que fazem, junto à escrita deles, eu não ser mais eu. Coveiro que sou. É que tudo tem sido uma descoberta para mim. Quando escrevo, inauguro a mim mesmo. Uma descoberta. Uma abertura de um livro. Uma abertura de uma não história. É como aquela moça da história do livro *A hora da Estrela*, de Clarice Lispector. Ah! Macabéa. Sinto-a flamando em meu corpo. Tudo para Macabéa era uma novidade. Uma descoberta. A vida. O dia. As palavras. A morte. E novidade é bom, né? Pois é, acho que o ritual que faço, todos os dias, é movido por essa promessa. A promessa da novidade. Um novo de idade. Velho, mas novo. Novo-idade.

De todas as existências existentes, matemáticos que aproveitaram as soluções da antiguidade, dois desses matemáticos que melhor tiraram proveito dos escritos dos antigos, representam o ponto de partida deste livro. Descartes, em sua obra *A Geometria*, de 1637, inaugurou a era da geometria analítica, com a valiosa ajuda dos escritos de Apolônio e Pappus. A seu turno, Fermat e seus tratados

² Minha proposta neste livro, como já destacado em linhas anteriores, é falar de rastros não percebidos. De uma (não) história. Rabiscos a esmo, intermediários, do cálculo. Ou seja, não explorarei a história do cálculo em obras que, nesse século, ainda vinham sendo estudadas, como: os Elementos de Euclides; as Cônicas de Apolônio; Sobre o Equilíbrio de Planos de Arquimedes, entre outros.

sobre geometria, álgebra e aritmética, escritos entre 1630 e 1660, tornaram-se objetos de admiração até os dias de hoje, graças à influência de Apolônio e de Diofanto.

Eu vinha rabiscando nas primeiras páginas que alguns desses matemáticos não são mencionados frequentemente nos livros didáticos, isto é, foram recortados dos livros didáticos e da história dos heróis, apesar de não o serem da história da matemática. Neste momento, se você ainda estiver lendo, deve estar se questionando: *por que os esqueceram? Quais motivos não faz deles um personagem da história dos heróis?* Penso agora que, para você não se frustrar com minha má vontade de responder seus questionamentos, uma resposta plausível para esse aparente esquecimento, encontra-se, possivelmente, no caráter da contribuição que eles fizeram para o embasamento dos cálculos de Leibniz e Newton. Trata-se de uma contribuição intermediária. Ou seja, entre o preenchimento de algumas lacunas, de pequenas contribuições, de detalhes sem os quais o resultado seria, indubitavelmente, desfavorável para a evolução do cálculo e da matemática, conforme já dito.

Do ponto de vista metodológico, a escolha de uma visão panorâmica sobre a evolução dos cálculos de Leibniz e Newton, por parte dos livros didáticos, com exceções, parece frustrar as expectativas de todos aqueles que procuram compreendê-los um pouco mais a fundo, pois faltam as particularidades que tratam diretamente de sua história.³ Para mim, essa perspectiva faz com que você perca, inegavelmente, detalhes importantes e interessantes sobre o cálculo, e as ideias que o alicerçaram, especialmente

³ Não se trata aqui da defesa de uma visão ou de uma abordagem intensiva da história da matemática, muito pelo contrário. Acredita-se que, tratar a história da matemática de forma muito superficial, ou muito profunda é extremamente contraproducente, principalmente quando se pretende utilizá-la como recurso didático a sua própria compreensão.

aquelas relacionadas à construção das tangentes e sua inversa, os infinitesimais e os indivisíveis. Confesso estar convencido de que deixar com que os ecos, os rastros das existências não lembradas, daquilo que não sou, daquilo que venho sendo, de minhas descobertas, falem neste livro pode, em muito, facilitar o entendimento de ambos os cálculos, tornando-os mais claros e, até mesmo, mais acessíveis.

No entanto, não é apenas disso que estou convencido, mas também que, para apreciar uma obra de arte, não se deve ficar nem muito perto, nem muito longe, pois, no primeiro caso, perde-se a visão do todo e, no segundo, os detalhes mais interessantes e elucidativos. Igualmente, para o entendimento da matemática, sua história e sua evolução, deve-se encontrar a boa distância, nem perto demais, nem longe demais. Há de se enxergar as partes e o todo, simultaneamente.

Enfim, o que pretendo fazer neste livro, utilizando uma abordagem inédita, é explorar a matemática intermediária, de matemáticos às vezes desconhecidos, infames, que contribuíram diretamente no processo de invenção dos cálculos de Leibniz e Newton.⁴ Voltando às minhas palavras anteriores, é uma antologia de existências, de suas contribuições matemáticas. Por tudo que venho descobrindo, por minha vontade constante de estar no cemitério, pelas corajosas vezes que me pego a ler tudo aquilo que trago em meus braços ao sair portão afora, desejo mostrar-lhe por que Descartes e Fermat representam, efetivamente, os elos mais fortes do início desse processo de invenção. Assim, espero que os traços

⁴ Nem Leibniz, nem Newton teriam obtido sucesso com a invenção de seus cálculos sem as contribuições de Descartes, Fermat e alguns outros matemáticos menos ilustres, cujas obras e ideias serão aqui apresentadas para o seu deleite e, claro, o meu também. Essa matemática, aqui chamada de “intermediária”, exhibe o que há de melhor na matemática do século XVII.

tortos, a esmo, sejam capazes de dar língua aos ecos quase não ouvidos, aos rastros quase não percebidos de existências reais da história dos cálculos de Leibniz e Newton, bem como seu desenvolvimento no século XVII, oferecendo uma perspectiva nova, mas nova de novidade, a todos aqueles que os utilizam.⁵ E claro que eu, cozeiro que sou, opto pelo uso da linguagem e da simbologia matemática atual.⁶ A minha linguagem. É porque sendo eles, elas, também sou eu.

Em um dia daqueles em que, abraçado a pedaços de papel, saí a passos leves do cemitério. No caminho, enquanto minha atenção se perdia a tudo aquilo que eu levava na cabeça, uma velha senhora esbarrou-se em mim. Era uma senhorinha, de corpo pequeno, vestidos escuros com algumas marcas e restos de alimentos bem prensados no vestido. Ao se esbarrar em mim, com uma fraca e calma voz, ela disse: desculpe-me senhor. Não sei o que tinha naquela senhorinha. Algo nela me encantou. Não sei se foi graça em seus lábios ou se foi a descoberta de que ela estava sozinha no mundo. Ainda com o pensamento perdido nas coisas que eu levava na cabeça, perguntei àquela senhorinha, que não tinha pressa, o seu nome. Com a mesma fraca e calma voz, e um humor disfarçado, ela me respondeu: *Mocinha*. Eu sorri, ela sorriu novamente e o interesse estampado em minha cara fez com que ela falasse

⁵ Neste livro, não será possível contemplar todos os matemáticos, ou todas as questões que contribuíram com a invenção do cálculo. Assim sendo, embora valiosas, as contribuições de Anderson, Anjos, Bachet, Beaugrand, Brouncker, Briggs, Bürgi, Collins, Desargues, Faulhaber, Ghetaldi, Girard, Gregory, Grégoire de Saint-Vincent, Gunter, Hardy, Harriot, Hume, Huygens, Kepler, Mengoli, Mersenne, Mydorge, Napier, Neile, Oldenburg, Oughtred, Stevin, Tarporley, Torricelli, van Schooten, Vaulezard, Vlaq, Wallis, Witt, Wren e tantos outros, só serão mencionadas superficialmente.

⁶ A ideia de utilizar uma linguagem matemática moderna é torná-lo um livro de *afetos*, ou seja, capaz de afetar o público leitor.

outra vez: *nome, nome mesmo é Margarida*. Diferente de mim, ela não mora em lugar algum. Sempre na casa de um, de outro. Casas que lhe ofereciam camas estreitas para dormir. Estreita porque ela era pequenina. Ela, agora, estava a dormir, sem saber como e porque, nos fundos de uma casa grande. Não era uma casa como a minha. A casa de um coveiro. O que tem e como é a casa de um coveiro? Bom, é diferente da mocinha que dormia. Uma casa numa rua larga do Botafogo. Parecia que era de uma família abastarda que, mesmo achando a mocinha interessante, às vezes, até esquecia que naquele pequeno quarto dos fundos ela dormia.

Numa certa feita em que eles se depararam que a senhorinha estava lá há tanto tempo e que, de certo modo, o seu sorriso ricto incomodava algumas pessoas, eles decidiram mandá-la para Petrópolis. Não foi pela viagem a Petrópolis que me encantei com a mocinha, mas – como pela menina loura – pelo sentimento que demonstrara. Um sorriso disfarçado. O coração acelerado, mas ela esteve calma durante toda a viagem, não se enjoou. Mesmo não sendo acostumada com viagens. Ela estava contente com a viagem. Com os lugares que visitou. Achou a viagem bonita. Visitou armazéns, lojas, um cemitério. Eu sabia que eu já tinha visto aquela senhorinha em algum lugar. Ela passou lá no cemitério com o mesmo sorriso ao me responder seu nome. Foi nesta viagem que Margarida se encontrou. Sentada numa pedra, cansada e com a cabeça encostada numa árvore. Ah, como me esquecer desse encontro com Margarida no conto de Clarice Lispector, *A viagem a Petrópolis*. Sinto-me como a mocinha, sinto-a vibrar em meu corpo. Aquela aflição, mas também um contente desejo pela viagem. Uma viagem para se esbarrar, encontrar-se, desencontrar-se. A mocinha viajou a Petrópolis e, antes de sair daquele pequeno quarto, com uma pequena maleta na mão, cabelos penteados e, ainda, o sorriso ricto, aflito, acompanhou os jovens que a levaria.

Eu, com minha pequena mala na mão, um sorriso disfarçado, cabelos penteados, saio de minha pequena casa. A casa do cozeiro que sou. Viajo. Viajo para o século XVII, pois antes do desenvolvimento da teia matemática deste livro, é preciso que você entenda por que o século XVII foi tão especial no que se refere à matemática e seus atores. Prometo contar para você, brevemente, sobre o panorama matemático e social do século XVII e o nascimento de alguns ramos da matemática. É que esse negócio de serem eles, morto como eles, vivendo junto a eles, fez com que eu viajasse em outros tempos. Outro século. Agora me sinto aquela mocinha. E, caso eu morra na viagem, cansado, sentado em uma pedra e com a cabeça encostada em uma árvore, não fique triste.

Eu, mocinh@, observando a paisagem matemática do Século XVII. Aqui estou no século XVII. Antes de sair para rua, fucei alguns livros em minha estante e sentando em meu sofá, com uma xícara na mão, pernas cruzadas, eu leio um pequeno folheto com algumas páginas que estavam em minha mesa. Parece um jornal. Não sei ao certo o que é. Mas nele contêm muitas informações políticas e econômicas. Nele está escrito que tanto na Europa continental, quanto na insular, há um grande desenvolvimento da matemática que, rapidamente, está se voltando para a solução de problemas práticos. Além disso, ressalta que o contexto histórico deste século é o de um movimento Renascentista, mas que está apontando para o Iluminismo. Eu logo pensei: é que nessa época, há uma enorme preocupação com a melhoria do comércio, das comunicações, entre outras coisas que, supostamente, elevarão a condição social do homem europeu. Condição esta que foi deixada de lado ao longo do período medieval.

Antes de sair de casa, aprontei-me cautelosamente. Vestir-me com um velho terno que ganhei de meu pai quando vim de uma pequena cidade da Itália para estudar em Bolonha. É que estava fazendo frio e eu estava indo

lecionar minha primeira aula após minha formatura. Mesmo que eu tenha passado por muitos anos na universidade, aqui em Bolonha eu não tinha me acostumado com o clima e, naquele dia, a temperatura estava um pouco baixa. Eu sentia frio. Quando eu estava pronto, peguei algumas folhas com pequenos poemas e coloquei em minha pasta. Era minha primeira aula. Eu me sentia aflito. Não sabia como as crianças iriam me receber. É que mesmo sabendo que o comportamento era, sem igual, mecânico e ensaiado, eu temia. Fui às pressas, mas o colégio era bem próximo de minha casa.

Ao chegar, conheci alguns colegas que lá, também, lecionavam e logo fui conhecer minha classe que já estava indicada com meu nome na porta. Lá estava eu. Frente a alguns adolescentes. Todos muito bem penteados, uniformes bem passados. Todos iguaizinhos. Ainda que fosse de manhã, nenhum deles demonstravam ter sono. Pareciam maquiados de tão bem arrumados. Iniciei minha aula e, próximo do fim, entreguei aqueles poemas que eu levava na pasta e pedi que realizassem a leitura. Muitos receberam poemas iguais, outros diferentes. Mas o que me intrigou não foi a releitura que aqueles alunos fizeram dos poemas, mas, tão somente, a pergunta de um dos garotos que estava sentado nos fundos. Com o dedo indicador levantado, acreditando ele que aquele era um ato educado de pedir licença e com a voz trêmula – uma espécie de gagueira –, ele perguntou: *Senhor, o que tem a ver a passagem da Idade Média para a Idade Moderna?* Confesso que, por alguns segundos, eu fiquei calado. Estatizado. Por dentro eu tremia. Eu era um poeta. Mas eu sabia o que tinha acontecido. Eu havia estudado aquilo. E, nesse tempo de silêncio, lembrei-me do folheto de pequenas páginas que li antes de sair de casa. Lembrei-me também de um coveiro, com feição de menina loura e sorriso de mocinha. Não sei de onde vieram essas últimas lembranças, mas preciso dizer a você que me serviram de muita ajuda.

Quando me retomei ao estado normal, de um professor convicto e voz forte, porque é assim que um professor procura demonstrar sua convicção e sua autoridade, eu, então, o perguntei o nome, sem notar que estava estampado em uma espécie de pingente grudado em seu uniforme. Então ele respondeu-me: ‘sem nome’. Já não sei mais se o que me incomodava era sua pergunta ou o fato de ele se chamar “sem nome” o qual, aparentemente, apresentava ter uns treze anos. Mas, enfim, deixei isso passar por hora e, então, respondi a ele a pergunta chamando-o de garoto. Então eu disse: *foi na transição da Idade Média para a Idade Moderna que se encontram as origens do desenvolvimento da matemática e das ciências. O fim dos feudos agrícolas, entre os séculos XIII e XV, gerou o renascimento urbano-comercial e o surgimento de uma nova classe social chamada de burguesia, visto que “burgo” é sinônimo de povoado. Basicamente, essa nova classe social buscava o lucro através de atividades comerciais que precisavam da matemática para calcular e administrar seus lucros. Nessa época, surgem também os banqueiros e cambistas que, como os burgueses, começaram a buscar uma matemática mais eficiente.*

Assim o respondi. Como se eu estivesse decorado algumas frases de um livro. Formal, direto e, também, não permiti que houvesse espaço para aquele garoto ‘sem nome’ perguntar outra coisa. A aula acabou e, naquele mesmo dia, houve uma palestra na universidade que tinha como tema o sistema político e as tendências econômicas entre os séculos XVI e XVIII. Era, além de teórica, uma palestra futurística, pois tratava todos esses assuntos nessa atualidade e suas inclinações futuras. Foi nessa palestra que o que eu havia lido nas folhas em casa e muito do que eu havia falado com o garoto pareceu ter um pouco de sentido.

Ouvi de um velho senhor que estava a palestrar que, no período compreendido entre os séculos XVI e XVIII, as Grandes Navegações e as Expansões Marítimas tiveram início. Ou seja, o período que vivo é encenado por

esses acontecimentos. Além disso, o velho realça que, nessa época, a burguesia também está bem mais arrojada que a dos séculos anteriores, fazendo com que ela comece a buscar as riquezas inexistentes na Europa, em outras terras, para aumentar suas riquezas e as dos nobres que os financiavam. Desse modo, os lucros dos comerciantes e dos nobres estavam crescendo cada vez mais. Ademais, o início da utilização da mão de obra, a baixos salários e, com a moeda substituindo o sistema de trocas, as relações bancárias estavam aumentando, dia a dia. Antes de concluir sua fala e ouvir aquela velha e ensaiada, cena de palmas no final de todas as palestras, o velho encerrou dizendo: *no final desse período, o poder da burguesia, calcado no aumento do lucro, está se fortalecendo, e as desigualdades sociais estão começando a disparar. Desse modo, outro sistema político nascerá. Em outras épocas, irão chamá-lo de capitalismo.*

Ao sair da palestra, eu estava meio tonto com tantas informações. Desde o jornalzinho que li pela manhã, sentado em meu sofá, até esta última palestra, eu ouvi falar de um panorama político, acadêmico e econômico do qual eu não estava tão familiarizado. Sou apenas um poeta. O que faz um poeta? Versos?! Ritma palavras?! Eu estou confuso com tudo isso aqui. Gosto de minha poesia livre, solta. Saí às pressas da palestra e, no meio do caminho, me deixei levar por um pequeno bosque no caminho. Aquela mocinha, Margarida, veio novamente em minha mente e eu sentia um cansaço no corpo. Como o que ela sentira a andar pela rua que era mais bela que o Rio de Janeiro. Essa senhorinha e o seu cansaço tomou conta de mim, eu nem sei o que é Rio de Janeiro. Mas isso agora não importa. O que importa é que estou sentado aqui, à beira desse bosque e não consigo levantar-me. Eu preciso trabalhar amanhã. Com certeza aquele garoto sem nome estará a me esperar com uma nova pergunta que nada tem a ver com meu poema. Com minhas aulas. Acho que preciso esperar um tempo para que o cansaço alivie e, então, eu vá embora.

Foi sentado naquele bosque que, do mesmo modo que mocinha, aquele jovem professor fechou os olhos se entregando ao cansaço e morreu. Essa história me agonizou, passei dias sem voltar ao cemitério. Aquele jovem professor não pôde dizer nem o seu o nome. O que esperava do futuro. É como se ele fosse apenas uma passagem. Uma abertura. Uma abertura panorâmica do século XVII e o cenário matemático dessa época. Apenas uma entrada. Isso me machucou e, então, disse a mim mesmo, coveiro que sou, que não voltaria mais ao cemitério. Aquele ritual de ir aos pulos e voltar a passos lerdos estava acabando com o que sou: coveiro.

Mas o que é um coveiro sem cemitério, sem covas, sem as lápides, sem seu trabalho? Eu não sei, mas me sinto cansado. Todas as vezes que me lembro da morte rápida da mocinha e do jovem professor, meu corpo fica trêmulo. Temeroso. Com medo. Eu preciso acabar com isso. Preciso matar esse sentimento, mas não consigo.

Numa manhã dessas, eu ainda não havia voltado ao cemitério, encontrei com um velho amigo. Bom, eu nem sei se ele era mesmo meu amigo. Mas ele dizia que sim. Ele insistia em saber como estava minha família. Minha esposa. Meus filhos. Eu tentava falar, mas ele não deixava... Encontrar com este homem foi a garantia de meu eterno retorno ao ritual. De minha eterna ida ao cemitério. Eu me sentia morto, então, não havia sentido sentir aquele medo. Eu estava morto. Pois morto já havia sido, menininha loura, mocinha e até professor.

Parei defronte aos portões do cemitério, com o peito esticado e uma coragem de jagunço, e entrei novamente. Eu estava determinado. Coveiro que sou. Lá passei o dia e até uma boa parte da noite. Com o mesmo ricto de sempre, voltei para casa caminhando devagarinho com mais coisas na cabeça e outras comprimidas no peito. O coração estava, novamente, acelerado, aflito. A coragem que me fez entrar me acompanhava na saída, mas estava

tênuê. Quando cheguei em casa, percebi que havia, em tudo em que eu levava, algumas folhas que estavam manchadas pelo desgaste e que possuíam alguns furos daqueles bichinhos que nós por aqui costumamos chamar de ‘traça’. Na hora eu não me atentei, mas, pela madrugada – após um horrível pesadelo –, eu acordei, tomei um copo com água fresca, acendi a luminária próxima de minha mesa e vi que aquelas folhas escritas por um historiador dava continuidade à paisagem do século XVII e à posição que os matemáticos tiveram que tomar frente a todos aqueles acontecimentos que rodeavam o jovem professor. Poeta que ele era.

Nas folhas, havia algo bem teórico e direto, parecia que havia sido escrito naquela época mesmo. Então, tomei a liberdade de colocar aqui tudo aquilo que continha no texto. Na voz do escritor. Eu, coveiro que sou, não me atreverei a escrever. Não me atrevo, porque sou as próprias palavras. Inauguro-me junto a tudo isso.

Foi nessas folhas que descobri que nesse novo mundo, do século XVII, os matemáticos e cientistas ocupavam um lugar de destaque, pois eram financiados pelos mesmos reis e nobres que financiavam os comerciantes. Por essa razão, os interesses dos matemáticos se voltaram para a solução de problemas técnicos e específicos, criando uma nova forma de pensar. A ordem do dia era fazer a passagem da especulação científica para a prática científica, e a matemática tinha que tomar parte desse processo. As ciências empíricas, como a física, serviam de alicerce para as invenções capitaneadas pela engenharia e começavam a dominar as ciências teóricas e suas especulações. Nesses novos tempos, a matemática, caso quisesse sobreviver, deveria se adaptar, o mais rápido possível, à nova dinâmica.⁷ Você pode observar, então, que

⁷ Por essa razão, a geometria dos antigos e algumas especulações medievais tinham que se render aos novos ventos. Portanto, o século

o nascimento do capitalismo está intimamente ligado ao desenvolvimento da matemática do século XVII. Isso me fez lembrar das últimas palavras do velho professor de Bolonha na última palestra do jovem professor.

Além do mais, como consequência dessa mudança de perspectiva, a Europa do século XVII tornou-se uma espécie de “paraíso” para os estudiosos da matemática e demais ciências. O intercâmbio de ideias cresceu, garantindo e contribuindo para uma formidável expansão da matemática e das demais ciências. O crescimento desse intercâmbio foi estimulado, principalmente, pelo surgimento das academias de ciências nas grandes cidades, a saber: *The Society of London*, *A Sociedade Real de Londres*, em 1660 e, *L’Académie Royale des Sciences de Paris*, *A Academia Real de Ciências de Paris*, em 1666, e a *Compañia de Jesús*, em 1534, entre outras.⁸

A academia londrina, apesar de partilhar de muitos dos princípios da francesa, nasceu para a filosofia natural. Somente depois da consagração de Newton que outras ciências lá conquistaram um espaço. Nota-se também que a academia inglesa era mais fechada no que diz respeito aos seus membros e como eles lá atuavam.

Já a academia parisiense era mais aberta, tanto no que se refere ao seu conteúdo, quanto à atuação de seus membros. Tanto assim que era presidida por um holandês, o físico-matemático Huygens, coisa que jamais ocorreria na academia inglesa. Além disso, ela contava com vários outros renomados matemáticos e físicos, incluindo

XVII, pelo menos no que tange à matemática, poderia ser chamado de “século do rompimento”.

⁸ O surgimento das academias de ciência não apenas impulsionou a produção e expansão da matemática, como também se tornou um importante espaço para os matemáticos fazerem parte da história, ou seja, era importante estar em uma academia de ciência para se garantir na história.

Roberval e Leibniz que lá chegou em 1672 e partiria quatro anos depois. O estado absolutista lhes fornecia todos os recursos necessários, como laboratórios e bibliotecas, para que o desenvolvimento das ideias pudessem se solidificar e se tornarem aplicáveis ao tão almejado desenvolvimento tecnológico.

Contando com o eficiente aparato da igreja católica, a prestigiosa *Compañía de Jesús*, ibero-portuguesa, não poderia ser esquecida. Se, por um lado, ela se colocou como um obstáculo para o desenvolvimento de novas ideias, por outro, deu asas a ótimos matemáticos como Grégoire de Saint-Vincent, Bachel, entre vários outros, antes e depois do século XVII. Por ter um forte cunho religioso, oferecia aos pesquisadores um ambiente propício à concentração nos estudos e, por isso, atraiu inúmeros pensadores, formando vários professores em toda Europa. A *Compañía de Jesús* pontificou matemáticos como Descartes e Mersenne, só para citar; e, ao contrário do que se pensa, defendia um “dever de inteligência”, cuja obrigação maior daqueles que dela usufruíam era enriquecer o conhecimento e promover um saudável confronto de ideias.

No entanto, não foram só as academias que impulsionaram o desenvolvimento da matemática e das ciências do século XVII, pois aquilo que hoje conhecemos como periódico, revista ou jornal científico, têm suas origens nesse século e também têm a função de centralizar, validar e divulgar os trabalhos a eles enviados de qualquer lugar. Eles, portanto, desempenharam um papel unificador do conhecimento. Em Paris, o primeiro número do *Journal des Sçavans* data de 5 de janeiro de 1665,⁹ em Londres; o primeiro número do *Philosophical Transactions* foi impresso

⁹ O *Journal of Sçavans* é o mais antigo jornal literário e científico na Europa e é publicado até os dias de hoje, com características diferentes do passado, apesar de ter havido períodos sem publicação alguma.

em 6 de março de 1665; e,¹⁰ em Leipzig, o primeiro número da *Acta Eruditorum* veio a público em fevereiro de 1682.¹¹

Em linhas gerais, o crescente interesse de nobres e religiosos pelas ciências e pelo desenvolvimento tecnológico ofereciam aos matemáticos e aos cientistas condições que lhes permitiram trabalhar com certa tranquilidade, enquanto as trocas de ideias entre esses atores se intensificavam, por conta do desenvolvimento das comunicações por toda Europa. Os intercâmbios linguísticos começavam a ganhar força, mesmo que o latim continuasse a ser a língua das publicações de pesquisas e das aulas nas academias. É preciso deixar claro que os matemáticos do século XVII costumavam se comunicar, extensivamente, por cartas, confrontando ideias e anunciando suas novas publicações. Porém, essas correspondências foram, frequentemente, trocadas em alemão, inglês, francês e italiano, e não em latim, graças aos incentivos linguísticos daquela época. Por outro lado, o francês se tornou a língua da diplomacia e, com o tempo, também se destacou como um importante veículo de comunicação e intercâmbio dentro da Europa continental, mas não no insular.

Toda essa atividade linguística tinha uma razão de ser e, desse modo, o número de erros e imprecisões na matemática decresceram e as comunicações entre os matemáticos cresceram. Esse crescimento fez com que uma

¹⁰ O *Philosophical Transactions* é a segunda revista científica do mundo em ordem de antiguidade e a primeira em ordem de longevidade. Ele manteve suas características originais

¹¹ A *Acta Eruditorum* foi a primeira revista acadêmica alemã, escrita em Latim e incluía textos de novos escritores, comentários, resumos, ensaios curtos, notas etc., principalmente no campo da matemática e das ciências naturais, mas também no campo da teologia e filosofia. A colaboração de cientistas conhecidos na época assegurava a qualidade da nova publicação e, por isso, incentivou o desenvolvimento do pensamento crítico alemão.

comunidade internacional entre matemáticos se formasse para que as possíveis imperfeições fossem rapidamente corrigidas e querelas resolvidas. A correspondência de Mersenne é um exemplo singular, pois ele – além de se corresponder com outros matemáticos sobre seus próprios assuntos – mediou muitas querelas entre matemáticos a exemplo de Descartes e Fermat, e Roberval e Fermat. Os avanços no cálculo integral de Leibniz, por exemplo, resultaram de uma frutífera troca de cartas entre Leibniz e Huygens. Além disso, os matemáticos não hesitaram e viajaram para conhecer e interagir, face a face, com outros pesquisadores europeus. Descartes, Huygens, Mersenne, Leibniz e outros matemáticos de renome percorreram a Europa para conhecer seus correspondentes. As viagens para França, Itália, Holanda e Inglaterra tornaram-se corriqueiras e obrigatórias na formação dos matemáticos, pois lhes permitiram um significativo entrelaçamento de ideias. Assim, no século XVII, como pode perceber, tudo parecia contribuir para o desenvolvimento e o aperfeiçoamento da matemática e seus respectivos ramos.

Foi essa a exploração que fiz daquelas folhas manchadas que, naquela noite, levei para casa. Foi uma noite difícil após o pesadelo, então, resolvi descrever a você, meu caro leitor, como a matemática estava se posicionando frente a todos aqueles acontecimentos do século XVII. Espero que você não tenha esquecido que este capítulo é apenas uma abertura. Uma abertura que te chama porta dentro do cemitério para que, então, eu possa realizar minha antologia de existências. Minha exploração das produções intermediárias do Cálculo Diferencial e Integral.

No caixão, o Nascimento e o Aperfeiçoamento de Alguns Ramos da matemática. Em um dia comum. Dia de muito sol e trabalho. Eu, ao realizar meu trabalho de coveiro, descobri, em alguns documentos velhos, guardados em uma espécie de caixão antigo, várias pastas.

Como se fossem um banco de documentos. Neles continham informações acerca dos ramos da matemática, ou seja, suas áreas de aplicação e estudo. Com meu espanador, eu – com cuidado – limpei todos os documentos. Eles estavam velhos, mas a leitura era nítida. Esses documentos deixavam claro que foi durante o século XVII que as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da base analítica da matemática moderna futura foram criadas ou aprimoradas, e elas permitiram não somente o enriquecimento da matemática, mas também o da física.

Nesses documentos, notei que, historicamente, os ramos da matemática se apresentavam na seguinte ordem, a saber: 1) Geometria;¹² 2) Aritmética; 3) Álgebra e, finalmente, 4) Análise.

Durante o século XVII, a geometria deixa para trás a velha e confortável noção de pontos de referência, ou valores de referência, para entrar na era da geometria das coordenadas criada por Descartes e otimizada por Fermat. Ambos se dedicaram a combinar as mais diversas curvas e superfícies com equações algébricas, de modo a permitir um intercâmbio bastante proveitoso entre os dois ramos da matemática que, até então, pouco ou nada se conectavam. Tratam-se da geometria e da álgebra que se tornou o que se conhece por geometria analítica na matemática moderna. As participações de Descartes e Fermat na construção dessa nova geometria foram diferentes, mas, felizmente, suas querelas não os impediram de deixar uma herança matemática valiosíssima para os matemáticos que os sucederam. Descartes estabeleceu as ferramentas para o cálculo da tangente em um ponto sobre uma curva, procurando a linha reta que passa por esse ponto e que só

¹² A geometria projetiva de Desargues não será tratada neste livro, apesar de ter sido utilizada por Newton no *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*, de 1687.

tinha em comum com a curva um ponto duplo. Do mesmo modo, o método dos círculos tangentes lhe permitiu encontrar, por via da álgebra, a normal para a curva, ou seja, a perpendicular à tangente. Para tal, Descartes definiu as curvas geométricas com a ajuda de movimentos bem regulados entre eles e fornece um método universal com a introdução de um elemento de unidade de geometria algébrica. Enquanto isso, Fermat com a ajuda da geometria analítica de Descartes, focou no estudo dos máximos, mínimos e áreas sobre as curvas.

A esquecida aritmética, no século XVII, ressurgiu com toda força, principalmente na Europa continental. Com um novo olhar, os matemáticos descobriram novamente o conhecimento da antiguidade e desenvolveram novas técnicas para resolver algumas questões que ainda se encontravam pendentes. Para tal, eles se concentraram em um ramo da matemática conhecido como aritmética modular, uma das mais importantes ferramentas utilizadas pela teoria de números, pois implica o conceito de congruência.¹³ Contribuindo substancialmente para os avanços da aritmética, está a tradução de Bachet do livro de Diofanto, *Arithmétique de Diophante*, para o latim.¹⁴ A importância dessa tradução está diretamente ligada à matemática de Fermat, visto seu fascínio por ela, definiu uma série de proposições e teores no ramo da aritmética. Assim, foi a partir da obra de Diofanto que Fermat definiu vários teoremas, entre os quais se destacam: seu primeiro teorema, conhecido como

¹³ Uma congruência é a relação entre dois números que, divididos por um terceiro, conhecido como módulo de congruência, deixa o mesmo resto.

¹⁴ Diofanto escreveu sua obra *Arithmétique* por volta do ano 250, mas essa data não é precisa. Bachet traduziu-a para o latim em 1621. As outras contribuições de Bachet para a aritmética não serão tratadas neste livro.

“pequeno teorema”,¹⁵ seu último teorema,¹⁶ conhecido como “teorema de Fermat”; o teorema dos dois quadrados¹⁷ e uma família de números primos.¹⁸ Porém, a nova aritmética não encantou somente a Fermat. A seu turno, Mersenne também ficou fascinado pelos números primos e criou sua própria família. O interesse pelos números primos gerou uma grande e benéfica troca de correspondência entre Mersenne e Fermat. Posteriormente, os resultados obtidos por esses matemáticos, somados às suas correspondências, permitiu que Leibniz propusesse uma demonstração mais rápida para o “pequeno teorema” de Fermat.¹⁹ Por sua vez, Newton fez sua contribuição para

¹⁵ O “pequeno teorema” de Fermat pode ser demonstrado através das ferramentas da aritmética elementar. Seu enunciado é: “Se p é um número primo e n é um inteiro não divisível por p , então p divide $n^{p-1}-1$.” (SIMMONS, 1987, p. 700). Esse teorema, de 1640, pode ser aplicado na aritmética modular e na criptografia.

¹⁶ O “último teorema” de Fermat, também conhecido como “o grande teorema de Fermat”, só foi resolvido em 1994 pelo matemático inglês Andrew Wiles. A partir dessa data, passou a ser conhecido como teorema de Fermat-Wiles. Esse teorema foi encontrado como uma nota em sua cópia da tradução para o latim de Bachet da obra *Arithmétique* de Diofanto e dizia: “[...] é impossível separar um cubo em dois cubos, uma quarta potência em duas quartas potências, ou, em geral, toda potência acima da segunda em duas potências de mesmo grau.” (SIMMONS, 1987, p. 701). O teorema diz que não existem números inteiros, não nulos, x, y, z e n , em que $n > 2$, tal que $x^n + y^n = z^n$.

¹⁷ O teorema dos dois quadrados pode ser entendido da seguinte forma: um inteiro é a soma de dois quadrados se e somente se cada um de seus fatores primos da forma $4k + 3$ impliquem uma potencia par.

¹⁸ Para que $ab + 1$ seja primo, a deve ser par, $a = 2k$, e b deve ser uma potencia de 2, $b = 2^n$. Chama-se, então, número de Fermat generalizado, um número da forma $a2^n + b2^n$, onde $a > 1$.

¹⁹ A demonstração proposta por Leibniz só foi publicada depois de sua morte, cinquenta anos depois de escrita, já na primeira metade do século XVIII. Euler também propôs uma demonstração quase na mesma época do surgimento da demonstração de Leibniz. No entanto, aquela que prevaleceu foi a proposta pelo matemático Wilson, na

a aritmética estimando as somas parciais de séries harmônicas através de logaritmos.²⁰

A nova álgebra ou a análise simbólica cresceu devido ao empenho de Descartes e Fermat ainda na primeira metade do século XVII. Vale lembrar que a álgebra já existia na antiguidade, em uma forma bem rudimentar, mas ela só atingiu seu ápice enquanto ferramenta capaz de auxiliar no estabelecimento das regras dos cálculos de Leibniz e Newton no século XVII. Nesse sentido, a obra *A Geometria de Descartes*, teve um destaque especial, pois, além de introduzir a geometria analítica e explorar as operações habituais, como adição, multiplicação, subtração, divisão, raiz quadrada e raiz cúbica, fornece uma definição de exponencial inédita. Coube a Descartes e a Fermat inventar também algumas novas notações, pois, afinal, tratava-se de uma análise simbólica. Assim, o período de formação dessa nova álgebra rompeu, definitivamente, com as ideias dos antigos, já que permitiu tratar com maior clareza a solução de equações e o tratamento de polinômios. Outrossim, com base no trabalho de seus antecessores, Leibniz aprofundou o uso da notação simbólica em obras admiráveis, fortalecendo ainda mais sua ambição de criar uma *mathesis universalis*²¹ e explorou a seu favor essa ferramenta para

segunda metade do século XVIII, e hoje, o “pequeno teorema” é conhecido como “teorema de Wilson”, a saber: Se p é primo, então p divide $[(p - 1)! + 1]$.

²⁰ Uma série harmônica é uma série infinita divergente e seu nome deriva do conceito de nuances ou harmônicos. Na música, os comprimentos de onda das nuances de uma corda vibrante são $1/2, 1/3, 1/4$ etc. Cada termo da série, após a primeira, é a média harmônica dos termos vizinhos.

²¹ Descartes, antes de Leibniz, tinha o mesmo objetivo de criar uma *mathesis universalis*, uma matemática universal. Essa matemática seria uma ciência geral capaz de explicar tudo o que diz respeito à quantidade e à ordem, independentemente dos objetos a estudar.

desenvolver novos métodos de resolução de problemas como no texto *De Arte Combinatoria*, de 1666.²² Basicamente, Leibniz se concentrou em criar sistemas de equações lineares para resolver e configurar pela primeira vez as noções de determinante. Ao criar e utilizar essa nova escrita, Leibniz aplicou sua imaginação para criar “o novo” e inventou o conceito de potência real de um número real, antes mesmo de ser capaz de poder dar uma definição matemática rigorosa para isso.²³ Paralelamente, na Inglaterra, Newton fazia uma pesquisa semelhante. Ele generalizou seu teorema binomial, conhecido como “binômio de Newton”, válido para qualquer expoente, descobriu as identidades que levam seu nome, as “identidades de Newton”, foi o primeiro a usar índices fracionários e a empregar a geometria analítica para solucionar equações Diofantinas.²⁴

É, sobretudo, através da análise que o conceito de limite e o cálculo infinitesimal se expandiram de forma considerável, logo na primeira metade do século XVII. Em primeiro lugar, graças à construção das tangentes das curvas estudadas por Descartes, Fermat e Roberval. Em segundo lugar, em virtude dos resultados obtidos com o estudo das áreas sob as curvas. Entre eles, encontra-se o

²² Na falta de uma notação matricial, Leibniz representou os coeficientes desconhecidos por um par de índices ij . Enquanto hoje representamos, por exemplo a_{ij} , Leibniz representava 1_{ij} .

²³ O conjunto dos números reais foi criado no século XIX, mas a ideia que reside por trás dele é bem mais antiga. Sua evolução matemática encontra-se atrelada à evolução do conceito de continuidade. Grosso modo, os números reais formam uma entidade contínua, sem falhas ou saltos, como a percepção humana do espaço e do tempo. Leibniz, enquanto matemático e filósofo, mesmo sem ter conhecimento do conjunto dos números reais, aproximou a matemática da natureza, afirmando que ela também seria contínua, sem falhas ou saltos.

²⁴ Uma equação Diofantina é uma equação polinomial, com uma ou duas incógnitas, tal que somente soluções inteiras são contempladas.

primeiro método dos indivisíveis de Cavalieri, desenvolvido a partir dos resultados de Torricelli, Anjos, Gregory e Wallis. Esse método foi o que mais se destacou, visto que nele situa-se uma das bases do cálculo diferencial. No entanto, no final do século XVII, o cálculo infinitesimal foi desenvolvido, paralelamente, por Leibniz e Newton. Desde a publicação do cálculo de Leibniz, em 1684, seu método para tratar o infinitamente pequeno é usado no mundo dos matemáticos, ou pelo menos, em parte dele. Quando Leibniz entende que seu método resolve o problema inverso da tangente, ou seja, da integração, ele conquista de vez os matemáticos continentais. Cabe aqui um parêntese sobre um aspecto particular da análise que influenciou tanto a matemática de Leibniz, quanto a de Newton. O matemático Napier, juntamente com Bürgi, inventaram uma função transcendental e a batizaram de logaritmo. Inicialmente, a função logarítmica foi usada como uma tabela de referência para cálculos astronômicos. Em seguida, sobre os logaritmos, Briggs e, depois, Vlaq recalcularam e reconstruíram a tabela geral, base de quase todas as tabelas logarítmicas utilizadas nos dias de hoje; Gunter inventou a régua de cálculo logarítmica, Gregory trabalhou em suas propriedades e Brouncker iniciou o desenvolvimento das séries de potência. Contudo, tanto a definição final dessas séries que também contemplam a forma logarítmica, quanto a função exponencial, baseada na notação exponencial de Descartes, também foi aperfeiçoada por Leibniz. Porém, na Inglaterra foi diferente. Lá, um grande debate aberto na *Royal Academy of Sciences* levantou as imprecisões do cálculo de Leibniz e exaltou o cálculo de fluxões e fluentes de Newton, provavelmente escrito em 1670, mas publicado somente em 1690. Contudo, mesmo antes da publicação do cálculo de Newton, a escola inglesa prosperava, pois Wallis se aprofundava no cálculo dos indivisíveis, Mercator descobria a área sobre a hipérbole através da expansão de uma série

especial, publicada no *Logarithmotechnia*, em 1668, e o próprio Newton trabalhava em outros aspectos da análise matemática, como a teoria das diferenças finitas,²⁵ um método que leva seu nome, o “método de Newton”,²⁶ além de ter sido o primeiro matemático a usar e reverter as séries de potência. Cabe notar que o trabalho de Newton sobre as séries infinitas foi inspirado pelos decimais de Stevin e Napier.²⁷

É levando em consideração todo esse contexto histórico do século XVII e suas influências econômicas, entre outros, que dar fim aos problemas sobre as curvas, suas equações algébricas, a determinação das áreas que se encontram em regiões delimitadas por elas, a construção da tangente e sua inversa, os infinitesimais, os indivisíveis, bem como o cálculo de seus valores máximos e mínimos, tornou-se objetivo das existências das quais os próximos capítulos se ocuparão. Da existência de um coveiro, de uma garotinha loura, de Macabéa, de uma senhorinha mocinha, de um poeta, de matemáticos esquecidos pela história, de mim mesmo. Que se inaugura no ato dessa escrita, pois eu, coveiro que sou, sou, também, as palavras propriamente ditas.

²⁵ Um polinômio Newton é o polinômio de interpolação para um determinado conjunto de pontos de dados na forma Newton. Em outras palavras, as séries de Newton eram, em essência, a fórmula de interpolação, publicada pela primeira vez em sua obra *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Tratam-se de polinômios de interpolação de diferenças divididas, pois os coeficientes do polinômio são calculados usando diferenças divididas.

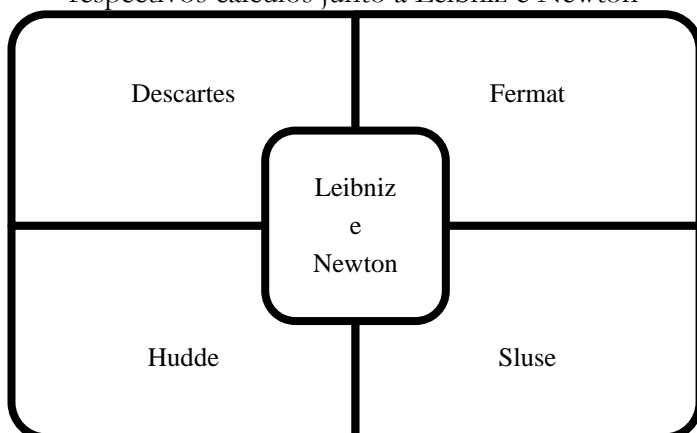
²⁶ Em análise numérica, o “método de Newton”, ou como é conhecido hoje em dia, “método de Newton-Raphson”, é um método eficaz para encontrar numericamente as melhores e mais precisas aproximações para raízes ou zeros de uma função real de uma variável real.

²⁷ Stevin criou um curioso sistema numérico que chamou de números decimais, mas a notação moderna foi obra de Napier.

CAPÍTULO 2

Território-coveiro, ele(s), nós, você(s): Descartes, Fermat, Hudde, Sluse, Leibniz, Newton e outros coadjuvantes dos cálculos

Diagrama 1: Matemáticos que inventaram os seus respectivos cálculos junto a Leibniz e Newton



Ontem eu bebi pela primeira vez. Foi uma sensação estranha, não sei o que estava em minha cabeça de fazer isso, mas fiz. Acordei agora e sinto meu corpo estranho, diferente. Algo em mim mudou. Não sei se é a vontade de fazer vômitos ou os pedaços de acontecimentos que restam em minha cabeça. Isso me preocupa. Por que está sendo assim? Tento me lembrar de tudo, mas não consigo. Apenas algumas memórias. São apenas memórias de acontecimentos que, de algum modo, me marcaram. Acho que posso chamar isso de experiência e, claro, quando chamo isto de experiência me vem à memória um encontro

que tive com Jorge Larrosa em seu texto *Notas sobre a experiência e saber da experiência*, de 2002.

É claro que eu usei o acontecido *ontem bebi pela primeira vez* para falar contigo sobre experiência. É que, desde as primeiras palavras deste livro, venho falando com você que eu, coveiro que sou, me inauguro junto às palavras escritas. Junto ao meu trabalho, ou melhor, meu simples ritual de ir dia após dia ao cemitério. Junto aos encontros e desencontros que tenho tido com os atores (des)conhecidos que vêm constituindo o que aqui escrevo. É que sou, também, as próprias palavras. É que sou, também, morto. Vivo. Coveiro. Mocinh@. Professor. Palavras. E (...). Ator desconhecido. E este exercício de escrita não escreve de um EU, mas de um ELE. Ele (coveiro). Ele (Mocinh@). Ele ... A tudo isso, quero chamar de experiência. Mas não é experiência como experimento, atrelando conhecimento e técnica. É experiência daquela experimentada. Daquela vivida. Daquela sentida. Daquelas que marcam e que, ainda sob o efeito do álcool, me traz à memória traços, ou melhor, marcas daquilo que me passou. São marcas de palavras sentidas. Palavras vividas. É que “[...] as palavras produzem sentidos, criam realidades e, às vezes, funcionam como potentes mecanismos de subjetivação. Eu creio no poder das palavras, na força das palavras, creio que fazemos coisas com as palavras e, também, que as palavras fazem coisas conosco.” (BONDÍA, 2002, p. 21). É que essa experiência tem feito coisas comigo. Coisas que, ainda que eu torça estas palavras, como sugere Graciliano Ramos, eu não consigo expressar apenas com palavras. É que esta experiência não está apenas nas palavras, mas, também, no corpo. Por isso eu venho insistindo com você – meu caro leitor – que me leia com o seu corpo. Eu, que insisto em ser eu, escrevo sobre/para ele. Ele. Você. Eu. Nós.

Mas que confusão, não?

Aqui, sou um território. A experiência está passando em mim. Sou “[...] como uma superfície sensível que aquilo que acontece afeta de algum modo, produz alguns afetos, inscreve algumas marcas, deixa alguns vestígios, alguns efeitos.” (BONDÍA, 2002, p. 24). Tenho sido afetado por tudo isso. Que território estou a me tornar? Território-coveiro. Território-Mocinh@. Território-Macabéa. Território-Professor. Território-Atores (des)conhecidos da matemática. Talvez, agora, seja importante que eu lhe diga que os atores não são desconhecidos, mas (des)conhecidos. “Des”, aqui, não é apenas uma preposição de negação, ou seja, atores não conhecidos, mas também como “des” de reforço. Reforçando o conhecido, porém desconhecido. É, também, desconhecido por eu ser, também, eles.

Estou te dizendo isso porque, em algum momento, você pode estar esperando um ineditismo neste livro nos nomes e, quando digo nomes, estou dizendo dos atores. Isto é, atores inéditos dos cálculos. Não é bem esse ineditismo que deve ser esperado neste livro. Mas o ineditismo da palavra. Da experiência do Ele. Do inaugurar-me n(ELE). De uma não história. É claro que você pode estar me cobrando, também, te dizer por que é uma não história, ou melhor, não é um livro de história. Vou te responder de uma forma mais simples e te respondo, assim, porque gosto da simplicidade. Gosto das coisas não ditas. Não faladas. daquelas apenas sentidas. Do par experiência/sentido. Digo que não é um livro de história, porque gosto dessa liberdade. Não é um ideal de liberdade, mas da liberdade de não ser nada e de poder ser qualquer coisa. O que estou te dizendo, meu amigo leitor – se é que posso te chamar de amigo, pois penso que não posso te chamar de nada – é que você pode chamar isto que estou a compor de qualquer coisa. Se preferir ser história, chame. Poema, chame. Contos, chame. Chame do que você quiser. Eu não chamo porque, quando se é

chamado, é trazido consigo um monte de regras. Regras para fazer história, para fazer contos, para fazer poesia, para fazer livro, para escrever. Digo que não é um livro de história por isso. Para que você não venha com um filtro ou um máquina de podar e estratifique minha experiência em um monte de técnicas. Em um monte de relações. São apenas linhas de experiências. Aquilo que consigo escrever. Aquilo que vem me passando a cada ida ao cemitério. Convido-te a apenas sentir comigo tudo isso. A jogar todos os filtros fora.

Lembra-te quando eu lhe disse para olhar essa escrita como um pai olha os primeiros rabiscos de seu filho? Bom, é disso que estou te falando. Não busque aqui a simetria dos traços. A beleza das cores combinadas. A relação com as coisas já ditas. Venha comigo, pois, mais uma vez, já não me contenho, estou saltando como aquela garotinha em direção do cemitério. E, por mais que pareça a você, ainda não acostumei com essa sensação. A sensação de busca. A sensação de ida. De chegada.

Foi nessa chegada que, remexendo secos ossos de sepulturas já abertas, de vidas já lidas, descobri uma pequena criança. Uma criança pertencente à nobreza francesa. Uma criança frágil. Uma criança que, por sua fragilidade, lhe foi concedido o direito de acordar tarde ou passar as manhãs na cama, meditando. Medit/ação. Quando digo isso, estou me referindo a uma meditação em ação, medit/ação. daquelas que movimentam. Isto é, que se mexe. Que faz você (re)pensar na sua forma. No seu eu. E penso: estando ela em ação, poderia nela haver uma forma? Que forma ela possui? Bom, eu ainda não sei te responder. Mas foi nessa medit/ação, do movimento, que esta criança começou a confrontar os ensinamentos recebidos na *Companhia de Jesús*. A essa criança foi dado o nome de René Descartes.

Já em sua idade adulta, Descartes tornou-se, então, uma espécie de “cidadão do mundo”, já que seu objetivo

era angariar o maior número de experiências possíveis para estabelecer uma nova Filosofia, apropriada ao descobrimento das verdades universais. Assim, concluiu que somente as ideias claras e distintas, que não levantavam quaisquer dúvidas, seriam confiáveis. A partir daí, lhe pareceu que o mais óbvio a se fazer era seguir o modelo do raciocínio matemático, visto que este representava a prova irrefutável de seu método, pois era dotado de resoluções elementares e lógicas, aptas a desvincular a mentira da verdade, o falso do verdadeiro. Foi então que, em 1637, Descartes publicou o *Discurso do Método* (penso que nessa época ele já não exercia sua meditação juvenil) e, ao final dele, havia um apêndice intitulado *A Geometria*²⁸. Nesse pequeno texto, encontrava-se a “chave de ouro” para todos os matemáticos do século XVII: a geometria analítica.

Um dia desses, balançando em minha rede e tentando descansar um pouco, deixei todas as folhas sobre meus peitos como que quem olhasse de longe achasse que eu estivesse lendo. Foi um dia cansativo. Li *A Geometria de René Descartes*, e muitas coisas passavam por minha cabeça. Em vários momentos eu me agonizava. Era como que um aperto no coração. Como se uma mão grande apertasse com muita força meu pequeno órgão e eu, então, sentia-o bater levemente. Com espaços de tempos prolongados. Enfim, era agonizante. Nesses momentos, a única coisa que eu queria era que parasse. Mas toda vez que eu tinha essa sensação, algo acontecia. Quando ela passava, eu levantava como se eu tivesse nascido outra vez. Era como se eu estivesse a morrer e, então, sobrevivia. Eu não sei por que estou te contando isso, acho que – mesmo eu acreditando que não posso te chamar de amigo, caro leitor – não consigo mais viver sem você. Sinto-o como minha

²⁸ Um encontro mais próximo desta obra pode ser tido no livro *A Geometria de René Descartes* escrito por Raquel Anna Sapunaru, publicado em 2015.

companhia e preciso te contar todo esse processo. É que tudo isso me fez pensar o quanto disso Leibniz e Newton leu. O quanto de Descartes havia neles. O quando deles há em nós. No nosso mundo. Estranho tudo isso. Toda essa forma que, às vezes, o contar se remete. Entendo que não sei ao certo se Leibniz e Newton leram a edição original de Descartes, visto que ela continha alguns erros que o próprio Descartes reconheceu antes de morrer. O que sei é que ambos leram a obra e fizeram um ótimo uso dela.

Os acontecimentos vêm transcendendo os portões do cemitério. Os muros impostos para separar o vivo do morto. É que aqui é assim: lá é o lugar dos mortos e aqui, fora dos muros, é o lugar dos vivos. Os vivos visitam os mortos, mas questiono: os mortos não visitam os vivos? O quanto os mortos estão mortos? E, aproveitando o ensejo, o quanto os vivos estão vivos? Ora, recebi uma carta hoje, era de um matemático alemão chamado Tschimhaus. Não sei falar seu nome. Não o conheço e não sei por que me enviou esta carsa. Passei horas com ela nas mãos, mas me corroía a vontade de abri-la. Quando a abri, não abri, rasguei todo envelope. Eu estava afoito, movido pelo desejo de saber o que esse cara queria comigo. Foi então que descobri que ele não havia escrito nada. Dentro do envelope, agora rasgado, havia outra correspondência. Uma correspondência com as tintas de Leibniz. De Leibniz para Tschimhaus. Uma correspondência de 1680. Uma folha muito amarelada. Não sei se era a cor da própria folha ou se era pelo desgaste do tempo. Enfim, isso não importa muito. Na correspondência, Leibniz dizia assim: “A primeira coisa da qual surgiu a minha descoberta do método do Triângulo Característico, e de outras coisas do mesmo tipo, aconteceu numa altura em que eu estava estudando geometria há menos de seis meses [...] Nessa altura, eu era bastante ignorante na álgebra cartesiana [...]” (LEIBNIZ; GERHARDT, 1978, p. 483). O que fica claro aqui é que Leibniz, nessa época, estudava *A Geometria de*

Descartes e, como se revela mais adiante, fez um ótimo uso dela, inclusive, aperfeiçoando-a.

Fui à biblioteca da cidade e foi engraçado isso. Quando entrei, o bibliotecário me olhou dos pés à cabeça. Talvez seja por eu ainda estar sujo de terra com alguns velhos rasgados nas calças, uma blusa social listrada e com os botões mal abotoados. Talvez seja por ele nunca ter visto um coveiro na biblioteca. Ou talvez as duas coisas. A biblioteca estava vazia, mas, na verdade, acho que ela nunca foi muito frequentada, a não ser por alguns alunos que, no final do ano, iam às pressas atrás de livros e ajuda para, então, se darem bem com suas notas finais. Mas também era novo pra mim, eu nunca havia ido àquele lugar. Sentia-me contente por estar em um lugar que eu ainda não havia ido e ver aquelas paredes carregadas de livros – velhos e novos – me fazia bem, não sei por que. Não sei por que também o lugar era novo, mas eu sentia, ali dentro, a mesma sensação de quando eu entrava pelos portões do cemitério. Sentia-me alegre tanto quanto. Fico pensando que essa alegria é como aquela que os Buendía sentiam quando juntavam, na sala farta do jantar, toda a família e, no final, ainda ouviam, através dos dedos e do amor do formoso e pálido jovem Pietro Crespo, uma bela canção. Foi nessa biblioteca, com esse sentimento no peito, que em alguns registros descobri que Newton havia estudado cuidadosamente *A Geometria de Descartes*, mas não a original em francês, de 1637, visto que ele sequer dominava esse idioma. A versão corrigida de van Schooten, de 1649, publicada em latim, idioma acadêmico da época.

Como dito anteriormente, na primeira metade do século XVII, Descartes, em sua obra *A Geometria*, apresentou o que se conhece por geometria analítica. A partir daí, a construção de curvas e sólidos se elevou a um novo patamar, visto que uma equação algébrica definiria uma curva e, por conseguinte, essa curva poderia ser facilmente transformada em um sólido jamais visto, por

meio de uma simples rotação em torno de um eixo, que hoje é chamado de eixo x ou y , coordenada horizontal ou vertical, abscissa ou ordenada. A importância dessa obra reside justamente nesse fato, a saber: a facilidade de lidar com problemas que, até então, eram demasiadamente complexos.

Esses dias, no caminho do cemitério ou dentro dele, me encontrei com José Arcádio Buendía – pai da família da qual eu vinha falando. Da literatura de Gabriel García Márquez, *Cem anos de solidão*. Foi um encontro espetacular. Ele me contou algumas de suas experiências. Contou-me, também, que certa época trocou sua mula e uma partida de bodes por dois lingotes imantados que, segundo os ciganos, trazia vida às coisas. É que andar com aqueles lingotes de metal gigantes pela pequena Macondo fazia com que todas as coisas se mexessem, tremessem. Pregos, panelas, alicates, caçarolas etc. Até as madeiras rangiam com os alvoroços dos pregos. José Arcádio Buendía se encantou com os ferros mágicos que os visitantes traziam para a cidade e se convenceu de que estava a fazer um bom negócio, visto que – como dissera a Úrsula, sua mulher – aqueles gigantes metais encheria, por poucos dias, toda a casa de ouro. José Arcádio Buendía estava movido pela descoberta. Pela descoberta dos lingotes. Mas, não só por ela, como também pela novidade. A cada vinda dos ciganos, uma novidade moveria com José Arcádio Buendía. Faria com que o mundo fosse novo. Ele era movido por isso. Sempre na busca. Movido pela descoberta. José Arcádio Buendía me fez compreender esse negócio de ser um território. De que experiência é aquilo que se passa. Que acontece. A vida daquele moço acontecia a cada vez que as descobertas passavam nele. Em seu território. A descoberta era um acontecimento para José Arcádio Buendía.

Do mesmo modo que o velho Buendía, venho sendo território da descoberta. Ela vem me acontecendo,

me passando dia após dia. O ritual de ir e vir no cemitério, os pulos no caminho da ida, os curtos passos da saída, os encontros dentro e fora dele vêm sendo acontecimentos. Aquilo que se passa. Como a experiência, o que se passa, o que acontece. Enfim, uma experiência.

Naquela ida à biblioteca, eu trouxe para casa algumas anotações e acabei as esquecendo em cima de minha mesa. Por muitos dias, elas permaneceram lá, mas, em um dia em que ninguém havia morrido e que havia pouco serviço no cemitério, resolvi voltar mais cedo para casa e foi então que, ao abrir a porta da sala, avistei as folhas que, por muitos dias, permaneceram lá. Nessas folhas, com minha escrita bagunçada, letras tortas, uma tinta fraca, estavam escrito que, no século XVII, a quantidade de problemas começava a crescer na mesma proporção que as curvas e sólidos surgiam e, conseqüentemente, os matemáticos teriam agora que encontrar novos métodos para calcular as raízes das equações que representavam essas novas curvas e sólidos, seus máximos, mínimos, volumes, áreas; construir suas tangentes, cordas, ângulos e assim por diante. O grande desafio desses pensadores residia na construção de métodos gerais para solução desses problemas, pois não havia mais espaço para as soluções individuais. Nesse novo universo matemático, a solução da construção da tangente de uma curva revelava a possibilidade de um conhecimento profundo sobre o comportamento dessas curvas. Por essa razão, a geometria analítica adquiriu tanto prestígio quando veio a público, já que ela facilitou muito a descoberta de um método geral para a solução desses problemas, entre os quais se destaca o da construção das tangentes.

Foi interessante, também, descobrir – após a releitura das folhas anotadas, em alguns rabiscos encontrados no cemitério – que Descartes, na sua obra *A Geometria*, não disfarçava sua altivez ao ter encontrado um modo seguro de desenhar uma reta normal a uma curva

qualquer, em um ponto qualquer e, desse modo, desenhar também sua tangente. Em suas próprias palavras:

Porém, quando podemos desenhar as linhas retas que cortam essas linhas curvas, fazendo ângulos retos em determinados pontos, ou elas são encontradas por aquelas que elas formam os ângulos que queremos medir, ou o que tomo aqui pela mesma, que corta suas tangentes. Desse modo, é mais difícil medir a grandeza desses ângulos do que medir a grandeza dos ângulos compreendidos entre duas linhas retas. Por essa razão, acredito que deva ter dado aqui tudo que o que foi solicitado para o estudo dos elementos das linhas curvas. Isso ocorreu quando dei o método geral para desenhar linhas retas, fazendo ângulos retos com linhas curvas em pontos que escolhi, e ousei dizer que este não é somente o problema mais útil e mais geral que conheço, mas também aquele que jamais tenha desejado conhecer em Geometria. (DESCARTES, 2015, p. 40).

Velhas vozes ecoam nos trabalhos de Descartes, pois a ideia de desenhar uma normal para resolver o problema da construção da tangente deve ter surgido do conhecimento advindo de *Os Elementos*, de Euclides, pois a proposições 17 e 18, do Livro III, garantiam que o raio de um círculo é sempre normal à circunferência.²⁹ Descartes, então, estabelece que o raio de um circunferência tangente a uma certa curva, em um certo ponto, será sempre normal a essa curva. Só havia um problema: de modo semelhante, a

²⁹ Livro III, proposição 17: “A partir do ponto dado, traçar uma linha reta tangente ao círculo dado.” (EUCLIDES, 2009, p. 167) e, Livro III, proposição 18: “Caso alguma reta seja tangente a um círculo, e, a partir do centro até a junção, seja ligada alguma reta, a que foi ligada será perpendicular à tangente.” (EUCLIDES, 2009, p. 168). Observa-se que Euclides não utiliza o termo raio, pois esse não existia em seu tempo.

construção dessa circunferência tangente estava sendo explorada, com sucesso, por outro homem, qual seja: Pierre de Fermat que, aliás, já trabalhava nela há alguns anos.

Descobrir na sepultura de Fermat que seu compromisso nessas questões tem sido, para mim, uma grande experiência, pois percebo que paralelamente a Descartes, Fermat estava empenhado em estabelecer um método confiável para calcular máximos e mínimos de objetos geométricos e, nessa busca, concluí que seu resultado também seria adequado tanto para a construção da tangente, quanto para o cálculo de áreas sobre curvas, conforme apontado por Brassinne, em sua obra *Précis des Oeuvres Mathématiques de Pierre Fermat et de l'Arithmétique de Diophante*.³⁰ Perceba o quanto esses encontros têm causado em mim grande estranheza. Já não falo como antes. Antes garotinha. Antes mocinha. Antes covheiro. Mas como eles. Ora sou garotinha, mocinha, Macabéa, Buendía, ora sou eles. Morto. Vivo território de mortos. Andando em caminhos (des)conhecidos. Falando de coisas (des)conhecidas. Eu, território que sou. Fermat acontecendo no território que sou. Território-covheiro. E nele, as marcas dos pés de Fermat ficam fixas na macia terra que compõem esse território. Uma marca que diz que:

Seja a uma [quantidade] desconhecida qualquer da questão (ela poderá ter uma, duas ou três dimensões, segundo o que convém depois ao enunciado). Vamos substituir [...] $a + f$ pela primitiva desconhecida a , e vamos exprimir assim a quantidade máxima ou mínima em termos onde entrarão a e e , que podem ser de quaisquer graus. Vamos adigular, para falar como Diofanto, as duas expressões da quantidade máxima ou mínima, e vamos subtrair os termos comuns das duas partes.

³⁰ “Resumo das Obras Matemáticas de Pierre Fermat e A Aritmética de Diofanto”.

Feito isso, encontra-se nas duas partes da equação todos os termos que serão afetados por e ou por uma de suas potências. Vamos dividir todos os termos dos dois lados por e , ou por uma potência de e de um grau mais elevado, de modo que pelo menos dentro um dos termos, qualquer que seja o membro, e desaparecerá inteiramente. Em seguida, vamos suprimir todos os termos onde entrará novamente e ou uma de suas potências e, vamos igualar as outras, ou melhor, até que em um dos membros não reste nada. O resultado dessa última equação dará o valor de a , que conduzirá ao máximo ou ao mínimo, representando sua primeira expressão. (FERMAT, 1896, p. 121).

Essa marca pode, também, ser entendida como “método das eliminações” ou *adignaldade*,³¹ termo inspirado em Diofanto e começou a ser desenvolvido por Fermat, cerca de dez anos antes da publicação de *A Geometria* de Descartes.³² O resultado obtido por Fermat representava

³¹ “[...] para o sólido $(a + e)^2(b - e - a) = ba^2 + be^2 + 2bae + a^3 + 3ae^2 - 3a^2e$, eu o comparei ao primeiro sólido $a^2b - a^3$, como se eles fossem iguais, embora, de fato, eles não sejam. Essa comparação que eu chamo *adignaldade*, para falar igual a Diofanto, pois se pode assim traduzir do grego *παριστοιης*, do qual ele se serve.” (FERMAT, 1896, p. 126).

³² Diofanto foi um grande matemático do século III d. C. Para o historiador Taton: “Diofanto rompeu com a tradição antiga, renovou as especulações aritméticas da logística [entre os gregos, parte da aritmética e da álgebra que diz respeito às quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão] sob uma forma algébrica [...] ele introduziu abreviações para designar a unidade, o desconhecido, as cinco primeiras potências e seus inversos [...] Ele trata as quantidades desconhecidas como números pelas procedências operatórias que não diferem de nossa álgebra moderna [...] ” (TATON, 1969, p. 96). O grande feito de Diofanto foi o de abandonar a geometria e seus enunciados concretos e dar voz ao abstrato, criando uma álgebra que viria a influenciar Fermat. Observa-se, de fato, que em sua obra Fermat

um método de caráter geral, cuja divulgação ocorreu em 1636, mesmo tendo sido concluído em 1630, mas modificado um pouco depois. O nome desse texto, conforme descoberto, seria “Fragments Géométriques”, “Fragmentos Geométricos”, e agrupava diversos outros textos. Mais adiante, Fermat retornaria ao seu método para resolver o problema das áreas.

Meu trabalho se tornou árduo. Minhas idas ao cemitério se tornaram mais frequentes, pois eu não tenho ido apenas durante o dia, mas também à noite. Sinto meu corpo exausto. Acho que tenho sido sonâmbulo por muitos dias. Não percebo todas minhas idas. Toda minha caminhada. Vou incondicionalmente. Meu corpo me leva. Caminho sem perceber. Trago restos sem saber e, ao acordar ainda dormindo, vejo-os na minha sala. No meu quarto. Na minha casa. Os acontecimentos transcenderam os muros do cemitério. Acontece em todo lugar. Na minha casa. Na rua. Nos bares. Isso tomou conta de mim. Ele(s), nós, você(s), território-coveiro que me tornei. Me estranho. Estranho tudo. Até essa escrita. O que nela é dito. Como é dito. Quero que ela seja nada. Não desejo um livro de história. Não desejo capítulos. Não desejo introdução. Apenas aberturas. Apenas rabiscos assimétricos. Tortos. Colorações sem combinação. Versos sem rimas. Apenas experiência sentida. Sabe, meu caro leitor, sinto-me malgrado todas as vezes que me ponho a escrever-te. Não gosto das regras que me são impostas. Dos filtros que se põem diante de tudo isso. E, quando me canso, deixo que eles falem, mas apenas com uma condição: que falem no meu corpo. Corpo-território-coveiro.

fez uso dos números poligonais de Diofanto, pois segundo Pickover: “Diofanto é também importante devido seus avanços na notação matemática e seu tratamento de frações como números.” (PICKOVER, 2009, p. 250).

Por isso, falo. Falo especificamente sobre a construção da tangente, as primeiras ideias de Fermat. Primeiras ideias que surgem no texto *Contacts Spheriques, Contatos Esféricos*, que fazia parte dos *Fragments Géométriques*, e, posteriormente, na coletânea *Sur la même méthode: La théorie des tangentes, etc.*,³³ que fazia parte da coletânea de textos intitulada *Maxima et Minima, Máximo e Mínimo*, no qual é tratado detalhadamente desse problema.³⁴ Resumidamente, Fermat no Lema III, afirma que para que dois pontos de intersecção de uma circunferência com uma

³³ “Sobre o mesmo método: A teoria das tangentes, etc.”

³⁴ “Nós consideramos de fato no plano de uma curva qualquer duas retas dadas na posição, a qual pode se chamar diâmetro, a outra ordenada. Nós supomos a tangente já encontrada em um ponto dado sobre a curva, e nós consideramos por *adigualdade* a propriedade específica da curva, não mais sobre a própria curva, mas sobre a tangente a encontrar. Eliminando, seguindo nossa teoria de máximos e mínimos, os termos que devem ser eliminados, nós chegamos a uma *igualdade* que determina o ponto de encontro da tangente com o diâmetro, em consequência a própria tangente.” (FERMAT, 1896, p. 141). A equação $bx - x^2 = c$ tem sua origem do problema geométrico de dividir uma linha de comprimento b em duas partes cujo produto é c . Os antigos já tinham demonstrado que o valor máximo possível de c era $\frac{b^2}{4}$ e, para qualquer número menor do que o máximo, teriam que existir dois valores possíveis para x cuja soma era b . Viète, ciente do conhecimento dos antigos, mostrou que as duas raízes da equação $bx - x^2 = c$, por exemplo, x_1 e x_2 , quando se igualava $bx_1 - x_1^2$ e $bx_2 - x_2^2$ e, em seguida, dividia-se por $x_1 - x_2$, obtinha-se b . De posse desses resultados, Fermat concluiu que mesmo para o valor de máximo, existiriam duas soluções para a equação, com o mesmo valor: se $x_1 = b/2$ e $x_2 = b - x_1$, substituindo x_1 por $b/2$, teremos $x_2 = b - b/2 = b/2$. Isso era o que acontecia quando c se aproximava do seu valor máximo. Assim, surge o método de maximizar um polinômio que se resume nos seguintes passos: 1) toma-se um polinômio qualquer $p(x)$; 2) iguala-se as raízes do polinômio $p(x_1) = p(x_2)$; 3) divide-se ambas as raízes por $x_1 - x_2$; 4) iguala-se novamente as duas raízes. A partir desse resultado, Fermat continuou suas deduções rumo a uma generalização cada vez maior de seus métodos.

curva se tornem um só, a circunferência terá que ser, obrigatoriamente, tangente a curva. Para chegar a esse resultado, Fermat iniciou seus estudos em busca de uma compreensão mais profunda acerca da estrutura das equações que representavam curvas geométricas com base nos escritos de Euclides³⁵, Apolônio, Pappus, Arquimedes e Viète. É sobre este último que Fermat discorre:

Estudando os métodos da *syncrise* e da *anastrophe* de Viète³⁶, e buscando atentamente sua aplicação para a pesquisa baseando-se na constituição de equações, ele veio à minha mente derivar um processo para encontrar o máximo ou mínimo e, portanto, facilmente resolver todas as dificuldades relativas as condições limites, que têm causado tanto embaraço para geômetras antigos e modernos. (FERMAT, 1896, p. 131).

35 Fermat se inspirou no *diorismo* de Euclides, que aparece claramente no Livro I, proposição 22, de *Os Elementos*, a saber: “De três retas, que são iguais à três [retas] dadas, construir um triângulo; e é preciso as duas, sendo tomadas juntas de toda maneira, ser maiores do que a restante [...]” (EUCLIDES, 2009, p. 114). Em outras palavras, a soma de dois lados de um triângulo deve ser sempre maior que qualquer um dos lados. Assim, o *diorismo* deve ser utilizado como a explicação necessária e suficiente das condições que envolvem um problema, objetivando a solução do mesmo, ou, como afirma Mahoney: “[...] *diorismo* é, no padrão das provas euclidianas, uma afirmação que o teorema ou o problema é solúvel ou passível de prova. Ele geralmente toma a forma de uma determinação da suficiência de dados para encampar uma demonstração de uma proposição.” (MAHONEY, 1977, p. 328). Já em Heath, encontramos “[...] *diorismi* (cujo objetivo é determinar) quando o problema sob investigação é passível de solução e quando não é.” (HEATH, 1912, p. 319).

³⁶ *Syncrise* significa comparação e *anastrophe* mudar de lado. Ora, isso é exatamente o que Fermat faz: compara os termos de uma equação e os movimentam em torno do sinal de *adigualdade* até obter o resultado esperado.

Nesses escritos, Fermat mostrou que, por *adigualdades*, poderia determinar a tangente de uma curva, particularmente da parábola, conforme ele tratou no texto *Proposition de M. Fermat sur la parabola*.³⁷ Logo após a publicação de *A Geometria*, em 1637, Fermat, no texto *Des tangentes des lignes courbes*,³⁸ redefiniu suas curvas na forma de equações algébricas, utilizando-se da geometria analítica de Descartes, abandonando de vez as propriedades geométricas das equações herdadas de Viète. Em meus constantes encontros com tudo isso, percebo o quanto se tornou mais fácil para Fermat a explicação e a divulgação de seu método das aproximações.

Sentado em um dos bancos porta afora do cemitério, um jovem curioso insistiu que eu explicasse a ele esae método. Não sei se ele estava a me testar ou se era apenas curiosidade. Mas aquele jovem olhava para mim com estranheza. Talvez seja apenas pelas olheiras lívidas que tomavam conta da região abaixo de meus olhos. Mas me motivei com a vontade daquele jovem em saber como Fermat pensava seu método. Acho que foi a primeira vez que alguém teve interesse em saber o que eu fazia sendo coveiro. Foi então que, como aquele professor em sua primeira aula, disse-lhe: *garoto, se reescrevêssemos o método de Fermat numa linguagem contemporânea, para traçar uma linha tangente à curva $y = f(x)$, no ponto B, toma-se um ponto arbitrário A nessa linha tangente e, desenha-se duas perpendiculares, AI e BC, até o eixo horizontal.*

³⁷ “Proposição de M. Fermat sobre a parábola”.

³⁸ “As tangentes das linhas curvas”.

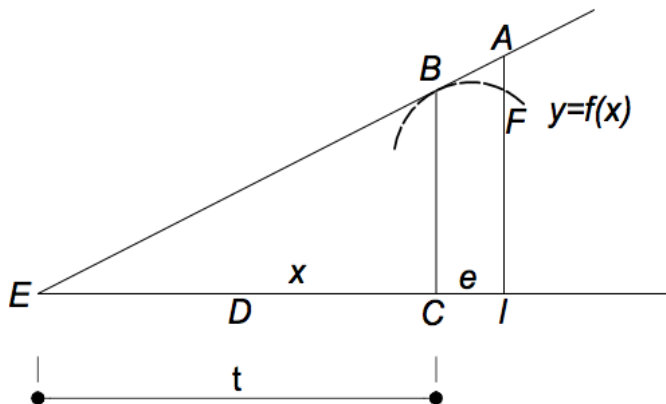


Figura 1: Determinação das subtangentes de Fermat

Em seguida, aproxima-se FI/BC e EI/CE , onde F é o ponto de intersecção da reta AI com a curva y . Se $CI = e$, $CD = x$ e $CE = t$ que representa a subtangente de y e, utilizando-se de seu próprio método, essa aproximação pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x+e)/f(x) \approx t + e/t$$

ou

$$tf(x+e)/f(x) \approx (t + e/t)f(x)$$

Em vista disso, Fermat conseguiu calcular a relação que existe entre t e x , ao cancelar os termos comuns, dividindo ambos os lados da equação por e , para, em seguida extingui-los por completo. Supondo-se que a curva seja uma parábola, $f(x) = (x) 1/2$, pela versão final do “método da eliminação”, conforme o texto *Méthode d'élimination*: Nouveau traitement en analytique des inconnues seconds et d'ordre supérieur,³⁹ $t(x+e) 1/2 \approx (t+e)(x) 1/2$ e, elevando-se ambos os lados da

³⁹ “Método de eliminação: Novo tratamento em analítica dos segundos desconhecidos e de ordem superior”.

adigualdade ao quadrado, tem-se que $t2e \approx 2etx + e2x$. Dividindo-se tudo por e , em seguida, retirando o termo que ainda contém e , encontra-se $t = 2x$.⁴⁰ Foi preciso, então, que eu dissesse a ele o que, aqui, eu já havia lhe dito, ou seja, o método de Fermat foi, inicialmente, desenvolvido para calcular os valores máximos e mínimos de objetos geométricos e, posteriormente, adequado à construção da tangente e ao cálculo de áreas. Além disso, acrescentei a ele que um historiador chamado Stillwell comenta e critica a influência de Fermat sobre o cálculo de Newton e Leibniz, ao dizer que “O cálculo de Newton envolve um passe de mágica usado por Newton e outros: a introdução de um elemento E “pequeno” ou “infinitesimal” no começo, dividindo por E para simplificar, então omitindo E no final, como se ele fosse zero.” (STILLWELL, 1989, p. 162).

Voltei para casa e, ao chegar, encontrei com algumas informações sobre Descartes. Nelas descobri que, logo após a comunicação do resultado de Fermat, em 1636, ele observou que, para construir uma circunferência tangente a uma curva, seria preciso usar uma ideia muito semelhante àquela usada por Fermat, já divulgada, ou seja, para que a circunferência seja tangente à curva, os dois pontos de intersecção de um círculo com essa curva perto

⁴⁰ Trata-se do resultado atribuído a Apolônio, conforme descrito no Livro I das Cônicas. Observa-se que Apolônio é capaz de reduzir uma figura geométrica em outra da mesma forma sugerida por Fermat. Heath explica essa semelhança do seguinte modo: “Se p é o parâmetro, e d o diâmetro correspondente, as propriedades das curvas são equivalentes às equações cartesianas, que se referem ao diâmetro e à tangente em sua extremidade como eixos (geralmente oblíquos), $y^2 = px$ (parábola), $y^2 = px \pm p/d$ (2) (a hipérbole e uma elipse, respectivamente). Assim, Apolônio expressa a propriedade fundamental das cônicas centrais, como a da parábola, enquanto uma equação entre as áreas, visto que ela aparece como uma proporção que, no entanto, é equivalente à equação cartesiana tendo os referidos eixos com o centro como origem.” (HEATH, 1921, p. 179).

do ponto determinado terão que se tornar um. Descartes estava ciente que, caso uma curva cortasse outra em dois pontos distintos, a equação que a representava deveria ter duas raízes distintas. Assim, dado um ponto C qualquer, em uma curva $y = f(x)$, onde P era o centro da circunferência procurada, tomava-se um ponto arbitrário A no mesmo eixo de P , $CP = n$ e $PA = v$, no eixo horizontal.

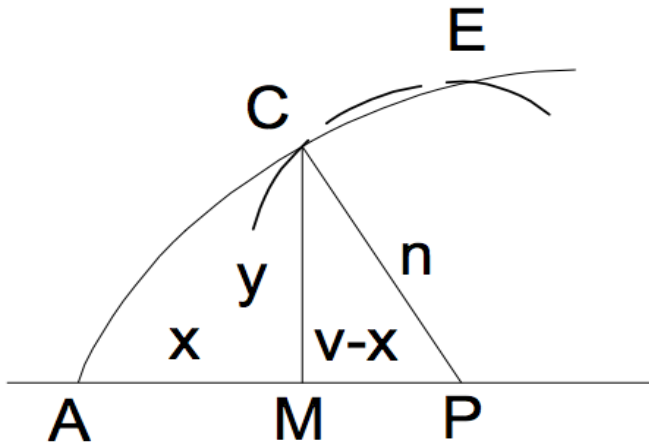


Figura 2: Determinação das normais de Descartes

Se $C = (x, y)$, logo, $PM = v - x$ e a equação do círculo seria $n^2 = y^2 + (v - x)^2$. Assim, tendo determinado v , Descartes também determinou P e, afirmou:

[...] se o ponto P preenche as condições desejadas, pois o círculo que tem P como centro e passa através do ponto C irá tocar, mas não cortar, a linha curva CE . Porém, se este ponto P está sempre muito mais próximo ou muito mais distante de A , o círculo deve cortar a linha curva não somente em C , mas necessariamente em algum outro ponto. Além disso, precisamos também considerar que se

o círculo corta CE, a equação que envolve x ou y como quantidades desconhecidas, supondo que PA e PC sejam conhecidas, deve ter duas raízes desiguais. Suponha, por exemplo, que o círculo corte a linha curva nos pontos C e E [...] É verdade que se E não se encontra do mesmo lado que o ponto C, somente uma dessas duas raízes será a verdadeira, enquanto a outra será revertida ou menos que isso. No entanto, quanto mais próximos os pontos C e E estão um do outro, menor é a diferença que há entre as duas raízes. Enfim, quando os pontos coincidem, as raízes são exatamente iguais, e isso significa dizer que o círculo que passa através de C irá tocar a linha curva C E sem cortá-la. (DESCARTES, 2015, p. 43).

Realizando esses cálculos em minhas paredes brancas, concluí, então, que se P for o centro do círculo tangente, a equação que determinava a intersecção com a curva $y = x^2$, no ponto (x_0, x_0^2) era $(x^2)^2 + v^2 - 2vx + x^2 - n^2 = 0$, uma equação do quarto grau. Essa equação tinha duas raízes, representadas, geometricamente, pelos pontos C e E . Em outras palavras, isso significava que a equação tinha um componente $(x - x_0)^2 q(x)$, onde $q(x)$ tinha um grau igual a dois. Descartes estava plenamente certo disso, graças aos seus estudos anteriores sobre raízes de equações. Assim, resolvendo a igualdade:

$$\begin{aligned}
 x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - n^2 &= (x - x_0)^2(x^2 + ax + b) \\
 &\text{ou} \\
 x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - n^2 &= x^4 + (a - 2x_0)x^3 \\
 &\quad + (b - 2x_0a + x_0^2)x^2 \\
 &\quad + (ax_0^2 - 2bx_0)x + bx_0^2
 \end{aligned}$$

e, igualando as variáveis de mesma potência:

$$\begin{aligned}a - 2x_0 &= 0 \\b - 2x_0a + x_0^2 &= 1 \\ax_0^2 - 2bx_0 &= -2v \\bx_0^2 &= v^2 - n^2\end{aligned}$$

Eu, como Descartes, havia conseguido resolver as três primeiras equações para v , fazendo $a = 2x_0$ e $b = 2ax_0 - x_0^2 + 1$, obtendo $v = 2x_0^3 + x_0$ como a coordenada horizontal do ponto P . Você, meu leitor, pode notar que a quarta equação pode ser descartada, e foi, pois v determina n . Contudo, o interesse de Descartes concentrava-se somente em construir a reta normal à curva, bastando determinar o ponto P e, por essa razão, não prosseguiu calculando a inclinação dessa normal.⁴¹

Infelizmente, uma das características de *A Geometria* de Descartes foi sua falta de clareza e distinção e, por isso, foi duramente criticada. O próprio Fermat acusa “Os cartesianos ainda tentam esconder o erro de Descartes? Quanto a mim, recuso-me a prever qualquer coisa: aguardo com interesse, mas sem acrescentar nada mais sobre esse assunto.” (FERMAT, 1896, p. 120). Mesmo assim, a geometria analítica cartesiana, como contribuição para o estabelecimento dos cálculos de Leibniz e Newton, tornou-se não só inquestionável, mas também um desafio para jovens matemáticos.

Matemáticos como o holandês Hudde. Sim, Johannes Hudde. Um matemático que, em 1659, ainda em torno dos problemas da tangente, máximos e mínimos, publicou um ensaio na edição holandesa de *A Geometria de Descartes*, editada por von Schooten.⁴² De acordo com

⁴¹ Caso Descartes tivesse prosseguido, a inclinação da normal seria dada por $-y_0/v - x_0 = -x_0^2/2x_0^3 = -1/2x_0 = 2x_0$.

⁴² Cabe lembrar que essa foi a edição de *A Geometria* estudada por Leibniz e Newton.

Michaud, em sua *Biographie universelle ancienne et moderne: histoire par ordre alphabétique de la vie publique et privée de tous les hommes*,⁴³ no *Epistola secunda, De maximis et minimis*,⁴⁴ “Hudde conseguiu simplificar o método de Descartes para a determinação das normais e, conseqüentemente, para a solução do problema da tangente.” (MICHAUD, 1843, p. 9). O método para a solução desse problema só veio a público, em seu nome, no ano de 1715. Além desse ensaio, considerado o mais importante, Hudde escreveu outros dois menos conhecidos e, devido a sua morte precoce, não foram amplamente divulgados. Segundo o historiador van Maanen, “Hudde provavelmente já conhecia sua regra antes de 1657, mas, de qualquer modo, ele a conhecia no ano quando a aplicou para determinar a largura máxima da folha de Descartes.” (VAN MAANEN, 1983, p. 31). Vale ressaltar que Leibniz lhe rendeu justiça, pois em um de seus trabalhos menos conhecidos, *De natura, reductione, determinatione, resolutione atque inventione aequationum*,⁴⁵ Hudde se dedicou à probabilidade como uma das vias do cálculo, caminho percorrido por Leibniz inspirado por Pascal. No entanto, Newton não mencionou Hudde em qualquer de seus escritos.

Em carta a von Schooten, Hudde declarou sua regra do seguinte modo:

Se uma equação tem duas raízes iguais e é multiplicada por uma progressão aritmética arbitrária (isto é, o primeiro termo da equação pelo primeiro termo da progressão, o segundo termo da

⁴³ *Biografia universal antiga e moderna: história por ordem alfabética da vida pública e privada de todos os homens.*

⁴⁴ “Texto segundo, sobre Máximos e mínimos”.

⁴⁵ “Sobre a natureza, redução, determinação, resolução e a invenção das equações”

equação pelo segundo termo da progressão, e assim por diante), então eu digo que o resultado será uma equação na qual uma das ditas raízes será novamente encontrada. (HUDDE *apud* van MAANEN, 1983, p. 31).

Para que você possa entender a importância da contribuição de Hudde para os cálculos de Leibniz e Newton, cabe compreender que se $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ tem uma raiz dupla $x = \alpha$ se $p, p + b, p + 2b, \dots, p + nb$ é uma progressão aritmética, e, então, ao somar $f(x)$ com a progressão aritmética, termo a termo, tem-se que:

$$pa_0 + (p + b)a_1x + (p + 2b)a_2x^2 + \dots + (p + nb)a_nx^n$$

E ela possui, igualmente, a raiz $x = \alpha$. Resumindo, se $f(x)$ tem uma raiz dupla, $f'(x)$ também terá. Vale lembrar que, toda e qualquer regra, precisa ser o mais geral possível, e, portanto, a regra de Hudde deveria possibilitar uma escolha aleatória da progressão aritmética a ser utilizada. Todavia, Hudde optou por utilizar quase sempre a progressão aritmética com $p = 0$ e $b = 1$.

Na prática, pelo método de Descartes, era primordial descobrir a relação entre v e a raiz dupla x_0 de $x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - n^2$, para a parábola $y = x^2$ cuja normal se quer encontrar, e foi justamente esse procedimento que Hudde conseguiu simplificar. Pela sua regra, utilizando $p = 0$ e $b = 1$, obtém-se a nova equação:

$$4x^4 + 2x^2 - 2vx = 0$$

ou

$$4x^3 + 2x^3 - 2v = 0$$

E, sendo x_0 uma das soluções dessa equação, $v = 2x_0^3 + x_0$, e a inclinação da tangente que Descartes não se interessou em calcular, $(v - x_0)/x_0^2 = 2x_0$, Hudde conseguiu simplificar o método de Descartes para a solução do problema da tangente.⁴⁶ Além disso, Hudde utilizou seu método para o cálculo de máximos e mínimos, dessa vez partindo do resultado de Fermat e, com o resultado obtido, construiu uma regra para a solução do problema da tangente para equações do tipo $f(x, y) = 0$. Porém, esse resultado não foi tão satisfatório quanto o primeiro.

No entanto, as contribuições não minguaram nos cálculos de Descartes, Fermat e Hudde, pois o século XVII parecia estar fadado ao desenvolvimento da matemática. Foi então que, revirando uma sepultura, me deparei com um nome diferente escrito na lápide. Tratava-se de René François Walter de Sluse. Com Sluse, um matemático belga, em seus restos encontrados, descobri a publicação de um livro intitulado *Mesolabum*,⁴⁷ em 1659, no qual apresenta um método para determinar a tangente e a subtangente de curvas dadas por equações do tipo $f(x, y) = 0$, e o máximo e o mínimo de equações algébricas. Bos (1986) afirma que “No que concerne a este livro [*Mesolabum*] [...] trata-se do maior avanço neste tipo de geometria [analítica], desde o famoso matemático e filósofo Descartes.” (BOS, 1986, p. 145).

Estou a fazer parte de tudo isso. Sou território-coveiro. É o que me acontece. E, em tudo isso, compreendo que a influência de Sluse sobre Leibniz e Newton deu-se de forma indireta. Bockstaele, em sua

⁴⁶ Como ocorreu com Fermat e outros matemáticos notórios do século XVII, não foi possível encontrar registros acurados de como Hudde chegou a esse método.

⁴⁷ “*Mesolabum* é um termo usado na geometria grega clássica que denota um instrumento para construção de meios proporcionais.” (BOS, 1986, p. 145).

comunicação intitulada *La theorie des tangentes aux courbes algebriques dans l'oeuvre de René-François de Sluse*,⁴⁸ afirma que “[...] só no ano de 1658, o método de Sluse apareceu pela primeira vez de forma estruturada, em correspondência à Pascal, mesmo que tenha sido rabiscado a partir de 1650” (BOCKSTAELE, 1986, p. 138). Nessa correspondência, Sluse declara ter descoberto um método universal de traçá-la:

Em várias linhas, eu encontrei a quadratura do círculo, o centro de gravidade e o sólido, mas não em todas, pois quem a encontrar para todas poderá enquadrar o círculo de diversas maneiras. Mas, para as tangentes, eu as tracei universalmente por uma regra muito simples e muito fácil, que eu posso lhe enviar, caso queira. (SLUSE *apud* BOCKSTAELE, 1986, p. 138).

Anos depois, Sluse trocou duas intensas correspondências, uma com Huygens, em 1662 e 1663, e outra com Oldenburg, em 1673, sobre seu método de cálculo das tangentes e subtangentes. Sluse na correspondência com Huygens apresentou a primeira parte de seu método para calcular máximos, mínimos e, depois, seu método geral para a construção das tangentes, já sistematizado. A seu turno, entre as correspondências com Huygens e Oldenburg, Sluse acrescentou na 2ª edição do *Mesolabum*, também conhecida como *Miscellanea*, publicada em 1668, duas outras seções nas quais tratou de outros problemas relativos às construções e à álgebra, em geral. Nessa edição, Sluse apresenta pela primeira vez a forma $-fx/f'y$ para o coeficiente angular da tangente em um ponto (x, y) de uma curva representada pela equação

⁴⁸ “A teoria das tangentes aos cubos algébricos na obra de René-François de Sluse”.

$f(x, y) = 0$. Bos, em sua comunicação intitulada *The significance of Sluse's Mesolabum within seventeenth-century geometry and algebra*,⁴⁹ afirma:

[...] o livro de Sluse era sobre construção geométrica. Ele versava sobre encontrar dois meios proporcionais entre dois comprimentos dados e em geral com uma classe de problemas geométricos chamados 'sólidos'; em ambos os casos Sluse ofereceu uma infinidade de caminhos para executar a construção. (BOS, 1986, p. 145).⁵⁰

Em correspondência com Oldenburg, fica claro que, anteriormente, Sluse solicitou a publicação de seu método na *Philosophical Transactions, Operações Filosóficas*, e que Newton, além de tê-lo lido, o criticou duramente. Estou com essa correspondência em mãos. Agora, neste momento, percebo muitas coisas que vêm acontecendo. Não sei se é essa coisa de não ser eu, mas ser ele, eles. Você, nós. Essa coisa de território-coveiro. Mas vamos à correspondência em que Oldenburg escreve:

Aqui impresso, honrado senhor, encontra-se seu modo de desenhar tangentes para quaisquer curvas, da forma que isso foi comunicado a mim pelo senhor em sua última carta. [...] Eu suprimi o nome do homem para evitar ofensas. O senhor Newton escreveu para mim nesse sentido: Através da sua última carta eu sem reduzi-las a outra forma. 'Isso é o que ele diz, que

⁴⁹ “O significado do *Mesolabum* de Sluse na álgebra e na geometria do século dezessete”.

⁵⁰ “A duplicação do cubo, ou a construção de dois meios proporcionais, foi um dos problemas geométricos clássicos (os outros são a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo).” (BOS, 1986, p.146). Descartes em *A Geometria* dedicou-se mais aos problemas da trissecção do ângulo, enquanto Fermat à quadratura do círculo.

eu estou confiante de que será bem aceito pelo senhor.' (OLDENBURG *apud* NEWTON, 1959, p. 304).

O artifício de Sluse era bem simples: os termos da equação que contém x e y precisariam ser eliminados. A partir daí, em primeiro lugar, eliminam-se todos os termos constantes. Em segundo lugar, concentram-se todos os termos em x de um lado da equação, os em y em outro e, os termos que contém x e y ficam dos dois lados, com sinais diferentes, os termos deslocados para o outro lado da equação devem mudar de sinal. No quarto e último passo, deve-se multiplicar cada termo, seja à direita, ou à esquerda pelo seu expoente e substitui-se um x em cada termo por t , isto é, subtrai-se uma unidade do expoente de x em cada termo e coloca-se t ao lado do termo representado essa unidade subtraída. Desse modo, é possível resolver a equação em função de t .

Assim, na equação $x^5 + bx^4 - 2q^2y^3 - b^2 = 0$, elimina-se $-b^2$ e transfere-se todos os termos em y para a direita. Ao se multiplicar cada termo, seja à direita, ou à esquerda, pelo seu expoente e substituir um x em cada termo por t , obtém-se $5x^4t + 4bx^3t + 2txy^3 = 6q^2y^3 - 3x^2y^3$. Isolando-se t , a subtangente, encontra-se:

$$t = \frac{6q^2y^3 - 3x^2y^3}{5x^4 + 4bx^3 + 2xy^3}$$

E a inclinação da tangente é:

$$y/t = \frac{5x^4 + 4bx^3 + 2xy^3}{6q^2y^2 - 3x^2y^2}$$

A influência que as obras de Descartes, Fermat e Hudde exerceram sobre Sluse é patente. Não obstante, Sluse conseguiu, afinal, produzir um método geral para construir tangentes adequadas a quaisquer tipos de curvas

dadas por equações algébricas, mesmo que não tenha deixado muito claro como chegou a esse resultado. Isso ocorreu porque Sluse era dotado de um espírito de generalização sem igual.⁵¹

Como escrito na abertura deste livro, os problemas matemáticos do século XVII eram vários. Até o presente, foram abordados aqueles que versam sobre construção da tangente, cálculo de máximos e mínimos. Agora, serão discutidos os problemas relacionados às áreas sobre as curvas que, como os problemas anteriores, foram de suma importância para o estabelecimento dos cálculos de Leibniz e de Newton.

É neste momento que as marcas de Fermat, deixadas no território que sou, voltam à cena. É por isso que abrirei aqui um breve parêntese para você, meu caro leitor, conhecer um pouco mais sobre Fermat. Assim como Descartes, a matemática de Fermat teve uma grande influência sobre a de Leibniz e a de Newton. Uma criança que, nascida numa família rica dedicou sua vida ao direito e a matemática, mas, formalmente, só foi reconhecido como matemático após a sua morte. Morte que devém vida. Fim que devém começo. Em vida, Fermat ocupou vários cargos públicos, como conselheiro do parlamento de Toulouse. Sua existência continuou presente nos trabalhos de Leibniz, com seu método da quadratura e, de Newton, com seu método de calcular máximos e mínimos.

⁵¹ O historiador da matemática Smith em seu livro *History of Mathematics*, refere-se a Hudde e Sluse, entre outros, como “Minor Writers”, ou seja matemáticos menores, mas contrariando essa posição, neste livro espera-se esclarecer melhor o teor das contribuições desses matemáticos para o estabelecimento dos cálculos de Leibniz e Newton. É que também gosto dessa coisa de menor. Atores menores. (Des)conhecidos. Marginalizados, isto é, atores que são empurrados pelas grandes marés para as margens. Marginalizados, ou seja, que estão nas margens. No liame entre mar e areia. Onde as ondas não param de banhar.

No ano de 1636, paralelamente ao seu trabalho sobre os cálculos dos máximos, mínimos e da tangente, Fermat travou uma intensa correspondência sobre o problema do cálculo das áreas com Mersenne e Pascal, mas, principalmente, com Roberval. Na primeira delas, Fermat teria definido uma classe de “curvas sólidas”,⁵² desconhecidas até então. Em carta a Mersenne, de 3 de junho de 1636, Fermat comenta sobre as “curvas sólidas” e explica sua origem:

[...] eu esquadrinhei infinitamente muitas figuras compostas de linhas curvas; como, por exemplo, se você imagina uma figura como a parábola, mas tal como os cubos das [ordenadas] aplicadas são proporcionais às linhas que elas cortam do diâmetro [abscissa]. Essa figura aproxima-se da parábola e difere somente nisso, enquanto na parábola toma-se os raios dos quadrados, eu tomo nessa figura o dos cubos; isso ocorre devido àquilo que o M. De Beaugrad, a quem eu mostrei a proposição, chamou de “parábola sólida”. Agora, eu demonstrei que essa figura é na proporção *sesquialterate*⁵³ do triângulo tendo a mesma base e altura. Você irá encontrá-lo examinando que eu tinha que seguir um caminho diferente que o de Arquimedes na quadratura da parábola e que eu

⁵² “Seja f contínua em $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$; seja B o conjunto obtido pela rotação em torno do eixo x , do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a$ e $x = b$, pelo eixo e pelo gráfico de $y = f(x)$. Estamos interessados em definir o volume V de B [...] [Assim,] $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ ou $V = \pi \int_a^b y^2 dx$, onde $y = f(x)$ ” (GUIDORIZZI, 2001, p. 400-401).

⁵³ Do *The Collaborative International Dictionary of English* {Sesquialteral ratio}: “(Matemática, arcaica), a razão de um e meio para um; portanto, 9 e 6 estão numa razão sesquialteral.” (<http://en.academic.ru/dic.nsf/cide/158058/Sesquialterate>)

nunca iria tê-lo resolvido pelos últimos meios. (FERMAT, 1896, p. 277-278).

Posteriormente, numa coletânea intitulada *Sur la Transformation et la Simplification de les Équation de Lieux, pour la Comparaison sous Toutes les Formes des Aires curvilignes, soit entre elles, soit avec les rectilignes; et, en même temps, sur l'emploi de la progression géométrique pour la quadrature des paraboles et hyperboles à l'infini*, Fermat demonstrou que, a representação matemática geral dessas “curvas sólidas” era $y = pxk$ e, enunciou o seguinte teorema: “Dada uma progressão geométrica cujos termos diminuem indefinidamente, ao contrário dos dois termos da razão, esse aumento é o menor dos dois, como o maior de todos os termos da progressão é a soma de todos os outros até ao infinito.” (FERMAT, 1896, p. 279). Na sequência, Fermat afirmou ter sido capaz de esquadrihá-las, utilizando um método inspirado, mas diferente, do da triangulação de Arquimedes.⁵⁴

⁵⁴ Sobre o método da triangulação de Arquimedes, Heath nos diz que “Não admira que o curso subsequente da geometria grega foi profundamente afetada pelos argumentos de Zenão sobre o movimento. Aristóteles de fato as chamou de ‘falácias’, sem ser capaz de refutá-las. Os matemáticos, no entanto, sabiam mais, e, percebendo que os argumentos de Zenão foram fatais para infinitesimais, viram que eles só poderiam evitar as dificuldades conectadas a eles, banindo de uma vez por todas a ideia do infinito, até mesmo a do potencialmente infinito, completamente de sua ciência; daí em diante, portanto, eles não fizeram mais uso de magnitudes para aumentar ou diminuir *ad infinitum*, mas contentaram-se com magnitudes finitas que podem ser feitas tão grandes ou tão pequenas quanto quiséssemos. Se eles usaram infinitesimais em tudo, era apenas como um meio de encontrar proposições; eles as provaram depois por métodos geométricos rigorosos. Uma ilustração disso é fornecida pelo método de Arquimedes. Nesse tratado, Arquimedes encontra (a) as áreas de curvas; e (b) os volumes de sólidos, tratando-os, respectivamente, como as somas de um número infinito de linhas paralelas, isto é, faixas estreitas infinitamente pequenas, e de planos paralelos, isto é, lâminas

Em outra carta enviada a Roberval e a Pascal, datada de 23 de agosto de 1636, Fermat lhes diz como poderia calcular qualquer área, de qualquer região contida por uma “curva sólida“ de ordem superior a $y = pxk$. Em sua próprias palavras,

Seja uma parábola AB de vértice A , se a giramos, a figura DAB em torno da reta DA tomada como eixo fixo, gerará a conchoide parabólica de Arquimedes, cujo volume é o mesmo do cone de mesma base e de mesmo vértice na relação de 3 para 2. Mas, se girarmos a mesma figura DAB em torno da reta DB tomada como eixo x , geraremos uma conoide de um novo gênero; precisamos encontrar a relação de seu volume com a do cone de mesma base e de mesmo vértice, algo difícil, que eu que demonstrei nesse relatório. (FERMAT, 1896, p. 286).

Antes mesmo de conhecer a resposta de Roberval para as duas correspondências supracitadas, Fermat escreveu outra carta a Mersenne, também em setembro de 1636, fornecendo a solução de um problema já demandado por Mersenne. O problema era encontrar um método para somar os cubos de uma série aritmética. Aparentemente, essa solução foi também repassada a Roberval por Mersenne e, estava contido na solução de Fermat para o problema das áreas. Conversarei com você sobre isso mais adiante. Por hora, você pode observar o raciocínio de Fermat ao explicar a Mersenne uma proposição relativa à triangulação das áreas:

infinitamente finas; mas ele claramente declara que este método só é útil para a descoberta de resultados e não fornece uma prova deles [...]” (HEATH, 1921, p. 272).

Enquanto isso, vou acrescentar uma bela proposição que descobri e que me iluminou a fazer perguntas como essas: na progressão natural, tem-se o dobro do triângulo tendo para o lado o último número, multiplicando este pelo número imediatamente superior; tem-se o triplo da pirâmide tendo por lado o último número, multiplicando este pelo triângulo do número imediatamente superior; tem-se o quádruplo do triângulo do último número, multiplicando este pela pirâmide do número imediatamente superior; e assim por diante até o infinito, por um método uniforme. (FERMAT, 1896, p. 291-292).

A resposta de Roberval veio, finalmente, em 11 de outubro de 1636 e, para surpresa de Fermat, ele relatou que havia chegado ao mesmo resultado, fazendo uso de um método que envolvia a soma de potências de números naturais. Nas palavras de Roberval:

A menos que eu esteja muito enganado, eu encontrei o mesmo método que você, usando linhas paralelas ao eixo e segmentos dessas linhas tomados entre parábolas e a linha tangente as mesmas parábolas no vértice; esses segmentos seguem a sequência natural dos números quadrados ou números cúbicos, etc. Agora, a soma dos números quadrados é sempre maior que a terça parte do cubo que tem como sua raiz a raiz do maior quadrado, e a mesma soma dos quadrados com o maior quadrado removido é menor que a terça parte do mesmo cubo; a soma dos cubos é maior que a *quadratoquadrato* e, com o maior cubo removido, menos que a quarta parte, etc. (ROBERVAL *apud* MHONEY, 1973, p. 220-221).

Isso significa dizer que, para Roberval, a área de uma região delimitada por uma curva do tipo $y = pxk$,

uma ordenada e uma abscissa, podia ser escrita da seguinte maneira:

$$A = x_0 y_0 / k + 1$$

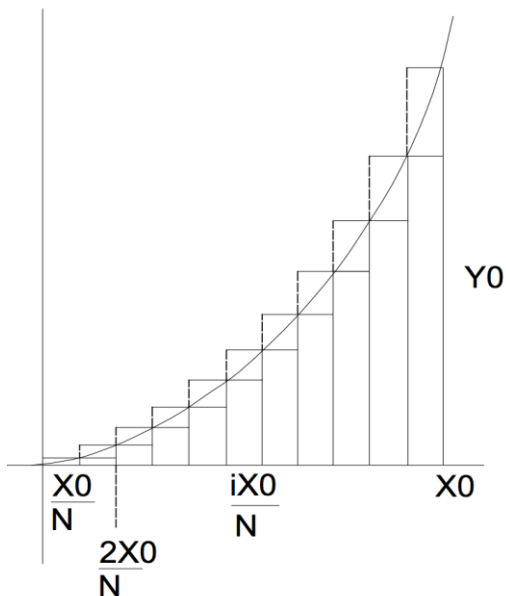


Figura 3: Descrição da área sob a curva de Fermat e Roberval

A frustração de Fermat é patente pela resposta que deu a Roberval. Afinal, eles alcançaram, praticamente, os mesmos resultados. Assim, Fermat questiona Roberval em 4 de novembro de 1636:

Você usou o mesmo método que eu na quadratura de parábolas sólidas, de parábolas de quarto grau, etc., *ad infinitum*. Mas, você tomou algo como verdadeiro que não tem possibilidade precisa de demonstração, [isto é], testemunhar, que a soma dos quadrados é maior que a terça parte do cubo [...] Todas essas proposições, embora belas nelas mesmas, têm me ajudado na quadratura que eu com prazer te enviei para avaliar. Se você multiplica quatro vezes o maior número incrementado de dois

pelo quadrado do triângulo dos números, e a partir do produto você subtrai a soma dos quadrados dos números individuais, cinco vezes a soma da quarta potência irá resultar. (FERMAT, 1896, p. 293-294).

Fermat queria que Roberval apresentasse uma demonstração precisa de seu resultado e, por outro lado, demonstrou ter uma.⁵⁵ A prova de Fermat era uma afirmação de cunho geral, calcada nas obras *On Spirals*, *Sobre espirais*, de Arquimedes⁵⁶ e *Arithmétiques*, *Aritméticas*, de Diofanto. Na carta enviada a Mersenne, citada anteriormente, é possível constatar esses fatos.⁵⁷

⁵⁵ Observa-se que Fermat insinua, sutilmente, que Roberval utilizou seu método, o mesmo apresentado por ele a Mersenne dois meses antes.

⁵⁶ Na última parte de *On Spirals*, proposições 23, 24 e 25, particularmente, deu-se a discussão sobre a quadratura da espiral arquimediana. Para Dijksterhuis: “Aqui [nas proposições 23, 24 e 25] a diferente forma de compreensão do método [da triangulação] é aplicada novamente, então, primeiro é preciso ser provado que figuras podem ser circunscritas e inscritas na figura cuja área se quer encontrar, para que em cada figura a diferença entre as áreas pode ser dada em menos que qualquer outra magnitude menor.” (DIJKSTERHUIS, 1987, p. 274).

⁵⁷ A título de ilustração, em outra carta enviada a Mersenne, contendo a solução de um problema colocado por este, é possível constatar que Fermat fez uso das ideias de Arquimedes, Diofanto, entre outros para solucionar o problema: “Finalmente, para sua questão sobre os cubos, aqui está como eu a concebo: dados vários números em progressão aritmética, os que quisermos, e conhecendo a razão da progressão e o número de termos, encontrar a soma de seus cubos. Primeiro caso: o primeiro termo é 1, e a razão da progressão é igualmente a unidade. São propostos tantos números quantos quisermos, por exemplo, 1,2,3,4,5,6,7,8,9; a soma de seus cubos é igual ao quadrado do triângulo, sendo o número de termos por lado. Se existem nove termos, como, no caso proposto, o triângulo é 45 e seu quadrado, 2025, será igual à soma cubos. Essa proposição, foi demonstrada por Barhel e por outros; os casos seguintes têm sido encontrado por mim. Se o primeiro termo é a unidade, a razão da progressão sendo um número qualquer, por exemplo 4, na progressão 1,5,9,13,17, eu tomo o triângulo sendo

por lado a soma do último termo e da razão menos a unidade. Esse triângulo é 210 e seu quadrado 44100. Desse quadrado, eu subtraio: 1º A soma dos cubos de vários números começando pela unidade e, na progressão natural que há unidades na razão da progressão menos 1; essa soma deve ser, por outro lado, multiplicada pelo número de termos. No exemplo proposto, o produto a subtrair, partindo dessa regra, é 180. 2º O triplo da soma dos quadrados de vários números começando pela unidade e na progressão natural que existe unidades na razão menos 1; esse triplo deve ser, por outro lado, multiplicado pela soma dos termos da progressão dada. Nesse exemplo proposto, o número a subtrair após essa regra é 1890. 3º O triplo da soma de vários números, começando pela unidade e em progressão natural, que existe unidades na razão menos 1; esse triplo deve, por outro lado, ser multiplicado pela soma dos quadrados dos termos da progressão dada. No exemplo proposto, o número a subtrair depois dessa regra é 10170. Assim, a soma dos números a subtrair de 44100 é 12240; o resto é 31860; eu o divido por 4, razão da progressão, e eu tenho assim o número 7965 que é a soma dos cubos de números 1,5,9,13,17. O método se aplica sempre da mesma forma e em todos os casos. Mas eu ainda não disse como devemos calcular tanto a soma dos números 1,5,9,13,17 quanto a soma de seus quadrados, indispensável para efetuar as operações anteriores. A regra para o Primeiro cálculo é dado por Bachet [tradutor para o latim da Aritmética de Diofanto] em seu opúsculo *Des Nombres Polygones*; quanto ao Segundo, operaremos como a seguir: tome a soma dos quadrados dos números começando com a unidade e em progressão natural, que existe unidades na soma de maior termo da progressão e da razão menos 1. O cálculo dessa soma é fácil, depois que Arquimedes o descreveu em seu livro *Des Spirales*. Dessa soma, retire: 1º a soma dos quadrados de vários números começando pela unidade e em progressão natural, que existe unidade na razão da progressão menos 1. Você irá multiplicar essa soma pelo número de termos; 2º o dobro da soma de vários números começando pela unidade e em progressão natural, que existe unidades na razão da progressão menos 1. Você irá multiplicar esse dobro pela soma do número de termos da progressão dada. Depois dessas subtrações, você divide o resto pela razão da progressão e você terá a soma dos quadrados dos termos. As regras dadas por esses dois casos você poderá imediatamente ou sem grande dificuldade deduzir aquelas que se aplicam as outras. De resto eu não queria mais me prender a esse assunto, pois já resolve o problema que é talvez o mais bonito de toda a aritmética, ou seja, aquele onde procuramos, para uma

Fermat descreve sua fórmula:

$$Nk + 1/k + 1 + NK/2 + p(N) = \sum_{i=1}^N i^{(k)}$$

Fermat escreve duas outras cartas a Roberval em dezembro, uma em 7, outra em 12, comparando seu método com o de Roberval. Por fim, Brassinne ao apresentar o resultado final da fórmula de Fermat, divaga e o enaltece:

Em sua memória sobre a comparação das linhas curvas com as linhas retas, o ilustre geômetra não dá uma nova extensão a seus métodos analíticos; ele os aplica somente a um exemplo memorável, e ele trata uma questão nova para sua época: nós nos limitaremos a reproduzir a substância da longa dissertação de Fermat (BRASSINE, 1989, p. 30-31).

Contudo, assim como Roberval, não se sabe exatamente como Fermat provou o resultado geral, conforme a fórmula acima. Questiona-se se ele a testou para alguns valores de k e, ao final, generalizou. Não é à toa que muitos creditam a invenção desse método a Fermat e a Roberval, pois as semelhanças entre ambas as fórmulas é inegável. Seja como for, Fermat ainda não estava plenamente realizado com seu método para calcular áreas sobre curvas, visto que ele tinha êxito somente para as parábolas de ordem superior, ou seja, se k fosse um número inteiro positivo. Assim sendo, para curvas do tipo

progressão qualquer, não mais somente a soma dos quadrados ou dos cubos dos termos, mas de quaisquer potências, para todos os graus, até o infinito, biquadrados, quadrados cúbicos, bicúbicos, etc. o método sendo também tanto quanto possível [...]” (FERMAT, 1896, p. 289-291).

$ym = pxk$, ou para hipérboles de ordem superior do tipo $ymxk = p$, seu método não funcionava. Cabe reforçar que Fermat, assim como todos os outros matemáticos do século XVII buscavam métodos de ordem geral, logo, um método que funcionava somente para parábolas não estaria de acordo com o esperado. Portanto, o que Fermat buscava era um método capaz de funcionar para qualquer k racional, positivo ou negativo.

O que estou dizendo a você é que, de modo breve, o raciocínio de Fermat constituía em aplicar seu primeiro método para encontrar a área sob a curva $y = px - k$, localizada à direita de $x = x_0$. Para tal, havia dois caminhos: o primeiro, ele deveria dividir a abscissa e, o segundo, ele deveria dividir o segmento de reta $x = x_0$, de 0 até $y_0 = px_0 - k$, em um número finito de intervalos e, somar as áreas dos retângulos inscritos e circunscritos. No entanto, o segundo caminho forneceria à Fermat um retângulo infinito, para o qual se desconhecia como dividir a área de tal modo que ela pudesse ser tão pequena quanto se desejasse. A seu turno, o primeiro caminho também parecia problemático, pois como dividir a infinita abscissa em um número finito de segmentos, arbitrariamente pequenos? A solução de Fermat foi, simplesmente, brilhante: ele dividiu a abscissa em um número infinito de intervalos, cujos comprimentos formavam uma progressão geométrica. Em seguida, Fermat utilizou sua fórmula para somar a progressão e, por último, as áreas.

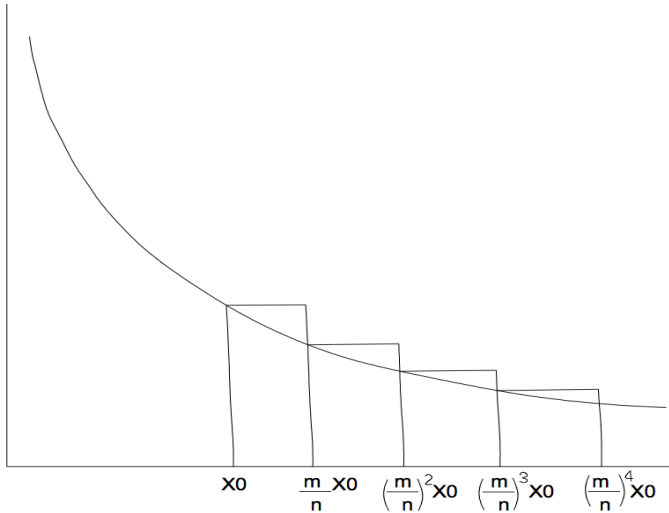


Figura 4: Descrição para determinação da área de hipérboles de Fermat

Em termos gerais, Fermat começou dividindo o intervalo à direita de x_0 nos pontos $a_0 = x_0$, $a_1 = \frac{m}{n}x_0$, $a_2 = (\frac{m}{n})^2x_0$, ..., $a_i = (\frac{m}{n})^ix_0$, ... onde m e n ($m > n$) são inteiros positivos. Ao final, tem-se que os intervalos $[a_{i-1}, a_i]$ serão tão pequenos quanto desejados, somente tomando m/n o mais próximo possível de 1. Desse modo, Fermat consegue circunscrever retângulos acima da curva sobre cada pequeno intervalo, somando todos os retângulos circunscritos e utilizando-se da fórmula para a soma de uma série geométrica tem-se:

$$R = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^p} \frac{1}{x_0^{k-1}}$$

Ao que parece, levando em consideração tudo que veio junto comigo do cemitério e que se encontra em minha casa, é que Fermat não se interessou em fazer o cálculo para os retângulos inscritos e, em termos fez

$\lim n/m$ tender a 1. Nesse caso, R tende a $1/k - 1$ e, finalmente a área é:

$$A = 1/k - 1$$

Todavia, Fermat observou que a ideia de dividir a abscissa em intervalos infinitos poderia também ser útil para descobrir as áreas das parábolas $y = px^k$ de $x = 0$ a $x = x_0$, somente dividindo o intervalo finito $[0, x_0]$ em um conjunto infinito de subintervalos, da direita pra a esquerda, para $n < m$ e, procedeu como anteriormente, provando que essa área é igual a:

$$1/k + 1$$

Para as áreas sobre as curvas $xy = p$ e $ym = px^k$, o método solicitou pequenos ajustes, objetivando evitar potências fracionárias em séries geométricas. Como dito anteriormente, esse resultado só foi divulgado na coletânea cujo título é *Sur la Transformation et la Simplification de les Équation de Lieux, pour la Comparaison sous Toutes les Formes des Aires curvilignes, soit entre elles, soit avec les rectilignes; et, en même temps, sur l'emploi de la progression géométrique pour la quadrature des paraboles et hyperboles à l'infini*.⁵⁸

A partir de agora, inicia-se uma exploração mais intimista da matemática que influenciou os cálculos de Leibniz e Newton. Leibniz sofreu uma grande influência de Pascal, Cavalieri e van Heuraet.

Por hora, são essas experiências que quero te contar. Como vinha lhe falando, leitor amigo, chame este livro como quiser. Eu o chamo de apenas um amontado de

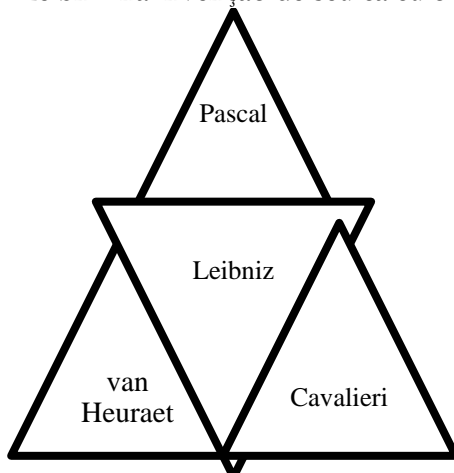
⁵⁸ *Sobre a transformação e a simplificação das equações de lugar, para comparação sob todas as formas de áreas curvilíneas, sejam entre elas, sejam com a retilíneas; e, ao mesmo tempo, sobre o emprego da progressão geométrica para a quadratura das parábolas e hipérboles ao infinito.*

folhas com rabiscos tortos de encontros e desencontros com alguns atores (des)conhecidos dos cálculos. Uma antologia de existências. Uma exploração de produções matemáticas de atores conhecidos e de outros marginalizados. Deixados de fora. Fora dos livros didáticos. Fora dos cálculos de Leibniz e Newton. Quero aqui, junto a mim, inaugurá-los. Como experiência que marca o meu corpo. Que marca o território-coveiro. Estou a engoli-los, a comê-los. Um ato antropofágico. Da antropofagia de Oswald de Andrade. E é tudo muito novo para mim. É, dia após dia, uma descoberta. Descoberta do território-coveiro. Do ele(s). Do nós. Do dele(s). De você(s). Uma escrita que inaugura. Que entorta. Que rabisco traços assimétricos. Descoloridos. Território-criança.

CAPÍTULO 3

Atravessando territórios, entre imaginário e real: (des)conhecendo Leibniz

Diagrama 2: Matemáticos que atravessaram o território-Leibniz na invenção de seu cálculo



Aconteceu hoje. Hoje, em pleno vigor do meio-dia. Eu, distraído que estava, quase não percebi. Quase não notei. É que acontecimento, experiência, é isso. Passa. Atravessa. Não se percebe, não se nota e, quando é notado, já aconteceu. Foi bem assim. Aconteceu-me em meu momento de distração. As pessoas com quem convivo gostam de dizer que isso é estar com a cabeça na lua. Seria, então, estar com a cabeça na lua um estado de imaginação? Imaginação... Imaginário... Mundo imaginário. Um mundo na lua. Uma cabeça na lua. Interessante isso. O que poderia, pois, então uma cabeça na lua, no imaginário, na imanência

da imaginação? Uma cabeça perdida no imaginário. Mas o imaginário não é aquela coisa que não existe?! A lua existe. Tenho, então, uma imaginação perdida em um imaginário real. É que a imaginação está nisso. Nisso de evocar a irrealidade, melhor, a (ir)realidade dos mundos.

Bom, eu estava falando com você de acontecimento. Experiência. É que hoje, enquanto eu caminhava, com a cabeça na lua, me esbarrei com um senhor. Mas era mesmo um senhor bem velhinho, com pinta de francês. Ao esbarrar nesse senhor, por estar com a cabeça na lua ou por andar daquele jeito – pulando, saltando –, não tive nenhuma reação. Mentira, tive apenas uma. Fitei nele os meus olhos, como se eu o conhecesse há muitos anos. Não pensei em nada. Não falei nada. Apenas olhei estranhamente. Eu estava com a cabeça na lua.

O senhor retribuiu meu olhar. Estranho que era, ele também fitou os olhos, estranhamente, em mim. Ficamos vários minutos, sem que percebêssemos, olhando um para o outro. Quando, então, de uma boca feminina saíram algumas de suas palavras que, com elas, diziam assim: é um duplo. Ele repetiu isto, acho que, umas três vezes. É um duplo. É um duplo. *É um duplo*. Eu fiquei sem entender, mas ele continuou a falar para mim: “[...] não existe mais a separação clássica entre real e imaginário como duas temporalidades distintas, pois o real é sempre real e imaginário ao mesmo tempo.” (LEVY, 2011, p. 28). É que no imaginário tudo é imagem. Mas não é uma imagem posterior ao objeto, mas uma imagem contemporânea a ele. Então, sendo a imagem contemporânea a ele – o objeto tem também um imaginário contemporâneo ao real.⁵⁹ É aquele negócio de estar com a *cabeça na lua*. Com a cabeça

⁵⁹ Segundo Levy “O objeto é sempre ele mesmo e sua imagem ao mesmo tempo, como duas faces de uma mesma moeda.” (LEVY, 2011, p. 28). Ou seja, a imagem não se coloca posterior ou anterior ao objeto, mas contemporânea a ela. Ela se inaugura junto ao objeto.

em um mundo imaginário, mas um imaginário que se realiza na sua (ir)realidade. Ou seja, “O imaginário não é uma estranha região situada além do mundo, *é o próprio mundo*, mas o mundo como um conjunto, como o todo.” (LEVY, 2011, p. 29, grifo meu). O próprio mundo. O mundo como conjunto, todo. Em suas palavras, o imaginário é, então, o *outro de todos os mundos*. Isto é, uma outra versão. Uma versão que se realiza na sua (ir)realidade. Em outras palavras seria dizer, então, que o imaginário é um desdobramento do real. Um desdobramento que realiza o outro. O fora. É que minha cabeça está fora. Passeando na lua. Minha cabeça está na lua. Está se desdobrando fora, no outro, no imaginário. Um imaginário contemporâneo à realidade.

Por fim, em nosso esbarro, sem direcionar àquele senhor sequer uma palavra, ele pegou em minha mão e, em um gesto de “Prazer em te conhecer e de despedida”, disse: “Quem sabe não esbarramos em outro momento. Foi um prazer, meu nome é Maurice Blanchot.”

Aquele encontro, um esbarrão, me deixou atordoado até então. Fico pensando: como, então, inaugurar o outro de todos os mundos dos cálculos? Como o imaginário se desdobra no real, em se tratando deste livro? Um livro de atores (des)conhecidos dos Cálculos. O que, aqui, é real, imaginário? Seria, pois, então, o imaginário desdobrando-se no real? Eu, território-coveiro que sou? Eu, mocinh@? Eu, Macabéa? Eu ele(s), nós, você(s), Fermat, Descartes, Hudde, Sluse ...? É que estou com a cabeça na lua. No mundo da lua. Pois “[...] colocar-se fora do mundo, fora do *eu* e fora de si é exatamente esse “desdobrar-se”, esse “deixar-se” vir à tona, à superfície.” (LEVY, 2011, p. 36, grifo da autora). Junto à superfície. É aqui que estes traços tortos, assimétricos, descoloridos estão se fazendo. No desdobrar-se do imaginário no real. Na superfície. No *eu* sendo ele(s). Nesse balanço do movimento de passagem no território-coveiro. Onde a

experiência é sentida. Experimentada. Vivida. Numa superfície imaginária onde eu não passo pela experiência, mas ela passa por mim. No território-coveiro. Com a cabeça na lua. No mundo da lua.

Ao chegar ao cemitério, já era tarde. Como eu vinha dizendo, os minutos passaram com aquele senhor sem que percebêssemos. Eu ainda estava com a cabeça na lua. Ainda estou. Essa (ir)realidade se desdobrando no real. Esse outro de todos os mundos inaugurando-me junto a esta escrita. A este livro. A esses atores (des)conhecidos dos Cálculos. Isso anda ocupando minha cabeça. Evocando o outro. Ele(s).

Eu disse a você, amigo leitor, que os muros do cemitério não conseguiriam barrar os acontecimentos, pois é na superfície que eles acontecem. E os mortos vivem quando jogamos todos seus restos na superfície. Ao cavar buracos mais fundos, ao limpar túmulos, encerrar lápides, regar flores, descubro e trago para superfície. É por isso que, anteriormente, eu vinha lhe dizendo que o que estou a fazer é uma exploração das contribuições de existências nos cálculos. E volto a dizer, não se trata aqui de inaugurar uma história, mas de inaugurar desdobramentos do outro de todos os mundos. Entre imaginário e real.

Ao continuar esse meu trabalho. Trabalho de coveiro. Esse negócio de explorar contribuições de existências. Vi-me, então, com diversos artefatos mostrando a travessia de outros atores dos cálculos em um território chamado Leibniz. Território-Leibniz.

Vendo Leibniz e Newton como territórios de passagens de atores (des)conhecidos, percebi que quando – em Paris – o cálculo de Leibniz pareceu estar começando, o presidente da Real Sociedade Francesa de Ciência, Huygens apresentou-lhe a edição holandesa de *A Geometria de Descartes* e inúmeros trabalhos de Fermat. Pelo diagrama apresentado na abertura desse livro, você pôde observar que *A Geometria de Descartes*, e os escritos de Fermat foram obras que influenciaram tanto Leibniz, quanto Newton,

mas quero trazer agora para a superfície que os trabalhos de Cavalieri, Pascal e van Heuraet, pelo o que venho notando, estavam intimamente ligados à maneira própria que Leibniz pensou e desenvolveu seu cálculo.⁶⁰

Cavalieri, discípulo de Castelli, foi apresentado a Galileu. Segundo Andersen, “Castelli estava tão satisfeito com seu estudante que em 1617 arranhou um contato com seu próprio professor [Galileu]. Isso resultou em mais de 100 cartas de Cavalieri para Galileu no período de 1619-1641.” (ANDERSEN, 1985, p. 293). Ao cavar, para além dos muros do cemitério, em um dia de muita empolgação, fui levado à beleza de cada artefato encontrado e me deparei – acometida pelo efeito drástico de destruição do tempo – com a principal obra de Cavalieri.⁶¹ Nela, com letras ainda escuras, vinha escrito: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*.⁶² Junto a essa obra encontrei, também, a que atravessou, sob passos lentos, os territórios-matemáticos do século XVII que trabalhavam com o cálculo, principalmente Leibniz⁶³. A ela, Cavalieri intitulou como: *Exercitationes geometricae sex*.⁶⁴ Na primeira obra, publicada em 1635, Cavalieri lança a ideia dos indivisíveis, ou melhor, de que você pode pensar em

⁶⁰ Além da construção da tangente, o problema dos infinitesimais e dos indivisíveis, diretamente ligados ao cálculo de áreas e volumes representados por equações algébricas, também mereceu a atenção dos matemáticos do século XVII. O interesse por esses assuntos surgiu devido à necessidade de solucionar antigos problemas, concernentes ao cálculo das áreas de curvas diversas. Assim, de Arquimedes a Galileu, vários matemáticos se debruçaram sobre essas questões, mas foi somente em 1635 com Cavalieri que resultados significativos começaram a aparecer.

⁶¹ Trata-se da geometria explicada de uma maneira nova com a ajuda dos indivisíveis do contínuo.

⁶² *Nova Geometria promovida pela razão dos indivisíveis do contínuo*.

⁶³ Cavalieri trabalhou também com os logaritmos de Napier.

⁶⁴ *Seis exercícios geométricos*.

calcular uma área como se essa fosse a soma de partes indivisíveis que a compõe.⁶⁵

Venho notando, após tudo que venho descobrindo e que vem me acontecendo, que não é uma tarefa fácil, mesmo nos dias de hoje, entender como Cavalieri concebeu o método que o levou ao princípio que leva seu nome. Sabe-se apenas que essa ideia foi desenvolvida em parte por Arquimedes, em parte por Kepler. Tenho aqui, então, uma arte constituída por outros restos. Outros artefatos. Seria, pois, então, Cavalieri um coveiro também? Ao que me parece, Cavalieri, ao menos, fez algumas visitas ao cemitério. Encontrou alguns artefatos. Encantou-se por eles e, desde então, empenhou-se, como matemático, em criar sua obra. Uma obra que se constitui em método. Um método que se deu junto ao método de Arquimedes e dos indivisíveis de Kepler. Em outras palavras, trata-se do método da exaustão de Arquimedes, incorporado à teoria das quantidades geométricas “indefinidamente pequenas”, por assim dizer, de Kepler. Com tudo isso, o que posso afirmar é que as quantidades “infinitamente pequenas” de Leibniz se deram, pelo menos em parte, junto à ideia dos indefinidos de Cavalieri.

Grosso modo, o conceito central da obra de Cavalieri girava em torno de “todas as linhas”, *omnes lineae*, de uma figura plana F , cuja notação criada especialmente por Cavalieri era $Of(l)$. Para Cavalieri, haveria uma coleção de interseções da figura plana F com um plano

⁷ Definição 1: “Se através de tangentes opostas de uma figura plana arbitrária, dois planos são conduzidos paralelamente em direção ao outro até que se torne congruente a ele, nem perpendicular ou inclinado ao plano da figura dada, e indefinidamente estendida sobre qualquer parte, do qual o primeiro é movido paralelamente ao segundo até que se torne congruente a ele; as únicas partes das linhas retas, que em todo o movimento são as interseções do plano movente e a figura dada, tomadas em conjunto são chamadas: Todas as linhas de tal figura, tomado uma delas como direção [...]” (CAVALIERI, 1647, p. 6-7).

perpendicular se movimentando paralelamente a si mesmo de um lado para o outro. Essas interseções eram linhas tão finas quanto se quisesse, de forma que pudessem ser entendidas como uma só magnitude, de acordo com a análise de Andersen:

O papel matemático das coleções de linhas pode ser melhor caracterizada comparando-as com as categorias das magnitudes dos Gregos, porque Cavalieri tratou as coleções de linhas de modo a sugerir que ele as considerava uma nova categoria de magnitudes a qual a teoria de magnitudes de Eudoxo poderia ser aplicada. (ANDERSEN, 1985, p. 302-303).

Apesar das linhas $Of(l)$ serem parte da figura F , Cavalieri não as confundia. Porém, apesar de, talvez, apenas talvez, isso pareça a você, nem só de linhas a matemática de Cavalieri era composta. Encontrei em seu túmulo uma proposta feita por ele de “todos os quadrados” e “todos os cubos”.⁶⁶

Algo curioso nisso, que me chamou a atenção, é que o grande feito matemático de Cavalieri foi provar algo que já era *conhecido* e que, depois de sua prova, mesmo que misteriosa, tornou-se o “Princípio de Cavalieri”. Isso me inquietou. Fiquei em meu quarto, enquanto tentava dormir, a lamuriar pelos cantos da cama, pensando e movendo os lábios em som de sussurros. Sussurrava em: o que pode, então, uma prova matemática? Tornar conhecido o já

⁶⁶ Definição 2: “Se, dado qualquer sólido dois planos tangentes opostos são conduzidos arbitrariamente, e indefinidamente estendido sobre qualquer parte, do qual o primeiro é movido paralelamente em direção ao outro até que se torne congruente a ele, as únicas figuras planas, que em todo movimento são descritas no sólido dado, tomadas em conjunto são chamadas: Todos os planos do sólido dado, tomado um deles como direção [...]” (CAVALERI, 1647, p. 7).

conhecido? Seria ela, então, um dispositivo legitimador do (re)conhecimento? Ou seria ela, também, um dispositivo nomeador de métodos? Método de Descartes. Método de Fermat. Método de Hudde. Método de Sluse. Método de Cavalieri. Métodos que carregam nomes de matemáticos por terem sido demonstrados por eles. Ainda questiono: seria, pois, então, a demonstração uma assassina? Faço esse questionamento por estar aparente a mim que a demonstração parece carregar consigo uma foice, como aquelas que aparecem nos desenhos onde a morte é representada. Uma foice para matar existências. (Re)conhecer métodos. Nomear métodos. Reconhecer o já conhecido.

Sobre o enunciado do “Princípio de Cavalieri”, para que você possa compreender melhor, resumirei nas seguintes palavras: duas figuras planas ou dois sólidos, com a mesma altura, têm áreas iguais, se as secções feitas por linhas ou planos paralelos à base de iguais altura possuírem a mesma área. Você pode observar que esse princípio vale para figuras que utilizam “todas as linhas” ou “todos os quadrados” como indefinidos, lembrando que poderia ser expandido para “todos os cubos” e, quiçá, para dimensões superiores à três. Isso não seria novidade, posto que Descartes, em sua *A Geometria*, equacionou graus superiores.⁶⁷

Já o método utilizado por Cavalieri foi o da sobreposição. Cavalieri concluiu que $O_r(l) = O_{t1}(l) + O_{t2}(l)$, onde r é um retângulo e $t1$ e $t2$, são os triângulos retângulos formados pela diagonal de r . Em 1647, Cavalieri

⁶⁷ Proposição III, Livro II: “Figuras planas arbitrarias posicionadas entre mesmas paralelas, nas quais, quando uma linha arbitraria paralela a elas é desenhada, a razão entre as interseções das duas figuras com as primeiras linhas é a mesma que as interseções com qualquer outra linha têm a mesma proporção entre elas como as ditas interseções. (CAVALERI, 1647, p. 103).

demonstrou outros resultados baseados na sua ideia de *omnes lineae*. Esses resultados foram aplicados a potências superiores, donde surgiu que a área sob a parábola mais alta, $y = x^k$, inscrita num retângulo é $1/k + 1$ vezes a área do retângulo. Ou seja, em outras palavras:

$$\int_0^a x^k dx = \frac{1}{k+1} b^{k+1}$$

Pode-se também escrever a fórmula de Cavalieri assim:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{1}{n+1} a^{n+1} \quad n \geq 0$$

E, generalizando,

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad n \neq -1$$

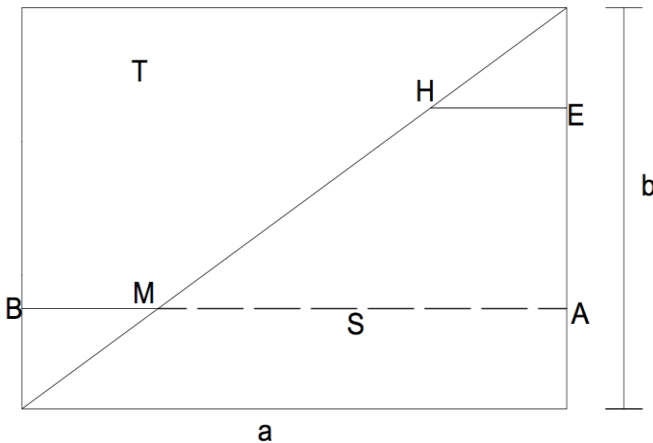


Figura 5: “Todas as linhas” de Cavalieri

Uma breve discussão sobre o método dos indivisíveis de Cavalieri num contexto mais fechado parece ser adequada, pois, afinal, esse método foi um dos antecessores do “método dos infinitesimais” de Leibniz. Como já dito anteriormente, Cavalieri criou uma maneira de medir superfícies e volumes pela via da comparação dos indivisíveis de duas figuras sobrepostas. Por exemplo, o postulado de Cavalieri, para efeito da soma dos quadrados dos indivisíveis, constituindo o paralelogramo da Figura 5, é igual a três vezes a soma dos quadrados dos indivisíveis compreendidos em cada um dos dois triângulos que constituem esse paralelogramo. Como já dito na abertura deste livro, após a criação da geometria analítica por Descartes, um dos problemas surgido foi, naturalmente, a determinação do coeficiente angular da tangente a uma curva, ou seja, a determinação da derivada. Uma vez que a teoria de limites, ou uma clara compreensão de transição do limite para a derivada faltava nessa época, e ainda estaria longe de ser estabelecido. Essa foi uma tentativa, provavelmente a melhor, para calcular as derivadas na proporção dos incrementos infinitesimais. Essa talvez seja a principal razão pela qual Leibniz rendeu tantas honras a Cavalieri. Contudo, não foi só Cavalieri que caminhou no território do cálculo de Leibniz...

Foi então que percebi, ali, um túmulo. Um túmulo, como os de Leibniz e Newton, cheio de flores, declarações, cartas, enfim, de artefatos. Eu, particularmente, gosto dos túmulos mais mortos. Com cara de morte. Sem muitas flores, pois estes fazem com que eu cave, abra buracos e jogue para a extremidade os artefatos encontrados. Esses me fazem entrar nos buracos. Pisar nos ossos. É que assim me percebo como coveiro. Explorando, nas covas por mim furadas, existências. Colocando na extremidade existências enterradas. É que a extremidade é o território. O terreno. E o terreno, como realça Clarice Lispector, é mais áspero e difícil. É no terreno que esse *o outro de todos os mundos* se

desdobra. Onde a ficção desdobra sua realidade em sua irreabilidade. Esse mundo, do terreno, da extremidade, da lua, do imaginário, da ficção, se inaugura na literatura. É claro que você precisa saber que ele, o *outro de todos os mundos*, “[...] não se trata, pois, de um outro mundo evocado pela literatura, mas do outro de todos os mundos: o deserto, o espaço do exílio e da errância, o fora.” (LEVY, 2011, p. 26). Ou seja, fora. No terreno. Na extremidade. Fora da cova, de seu lugar de sono perpétuo. Onde “nova casa poderia ser erguida”.

No túmulo que encontrei, aquele de tantos artefatos, havia um nome. O nome de um filósofo, matemático e físico. Nascido em Clemon Ferrand, França. Filho de um advogado, Étienne, que usava a matemática para seu lazer e integrava o círculo de amigos do padre Mersenne. Tendo ele uma vida curta, marcada por sua genialidade na matemática, por suas posições filosóficas e pelo misticismo religioso, como Descartes e Fermat, não conseguiu deixar ao mundo todo seu talento. Como eu fico aborrecido ao falar desse modo de alguém. É que a quantidade de flores, declarações etc. já fazem com que pessoas, como eu, fale dele com um ar de “nossa”. Este foi Pascal. O que mais me aborrece é, em momentos como esses, eu ter a necessidade de limpar túmulos já limpos pelos próprios visitantes. Até mesmo por outros coveiros.

Pois bem, o que já está na extremidade mostra que, inicialmente, Pascal dedicou sua carreira matemática às probabilidades dos jogos de azar.⁶⁸ Os resultados obtidos

⁶⁸ O historiador Todhunter levanta uma interessante análise da participação de Pascal nessa questão, visto que ele era um jansenista fervoroso, “Um problema relativo aos jogos de azar, proposto a um jansenista austero por um homem do mundo tornou-se a origem do cálculo das probabilidades.” (POISSON *apud* TODHUNTER, 1949, p. 7) e completa dizendo que “O problema que o Cavaleiro de Meré (um renomado jogador) propôs ao recluso de Port Royal [no caso, Pascal] [...], foi o primeiro de uma longa série de problemas destinados chamar

com esses estudos, somados à influência de Fermat, o levou a se interessar pelo cálculo, bem como pela aritmética e pela teoria dos números inteiros. Schubring, um de seus visitantes, afirma que o cálculo preliminar de Pascal voltou-se para os indivisíveis, mas, rapidamente, cedeu ao infinitamente pequeno que surgia, e completa: “Com Pascal, já se tornou claro que os infinitesimais não seriam aplicáveis somente em quantidades estáticas, mas também as dinâmicas. De acordo com Pascal, tempo e movimento estão entre os objetos que tem que ser estudados pela matemática.” (MALET *apud* SCHUBRING, 2005, p. 160).

Em uma correspondência que aqui encontrei, não foi cavando, ao Cavalheiro de Meré, ferrenho opositor da doutrina dos indivisíveis, datada de 1658, Pascal argumenta a favor dos infinitesimais, de acordo com o texto *Traité des sinus du quart de cercle*,⁶⁹ de 1654, em que ele propõe dividir superfícies em triângulos. Nas palavras de Pascal, seria, então, isto:

Eu não tenho dificuldades em usar a expressão ‘a soma de ordenadas’, a qual parece não ser geométrica para aqueles que não compreendem a doutrina dos indivisíveis e para aqueles que imaginam que isso quebra as regras da geometria ao expressar uma área através de um indefinido número de linhas. (PASCAL, 1922, p. 286).

Porém, foi nos textos *Traité des ordres numériques* e *Traité du triangle arithmétique*, anteriores ao *Traité des sinus du quart de cercle*, que Pascal oferece, respectivamente, uma apresentação dos coeficientes de binômios e uma elegante distribuição numérica em um quadro que ficou conhecido

à existência novos métodos na análise matemática, e render um valioso serviço na prática concernente à vida.” (BOOLE *apud* TODHUNTER, 1949, p. 7).

⁶⁹ “Tratado dos senos do quarto de círculo”.

na época como “triângulo aritmético”,⁷⁰ assim como algumas *pistas* que levaram Leibniz a seu cálculo.

Em linhas gerais, não é difícil entender porque o “triângulo de Pascal” revelou-se como uma importante inspiração para o trabalho que Leibniz apresentaria cerca de vinte anos mais tarde, já que, para montá-lo, Pascal utilizou pela primeira vez o método da recorrência.⁷¹ Novamente, é importante deixar claro que a ligação de Pascal com o cálculo surgiu por influência dos trabalhos de Fermat. Digamos que foram pistas deixadas por Fermat para que Pascal criasse, então, seu método. É que as pistas tem essa potência, a de deixar na superfície, no terreno, marcas. São como pegadas. E, neste momento, eu prefiro chamar de marcas. De experiência. Marcas da experiência. Uma experiência posta na superfície, no terreno. Infelizmente, com relação a Descartes, com quem travou algumas interessantes disputas filosóficas sobre a verdade existente no pensamento racionalista e no empirismo do mundo físico, Pascal pouco tratou de ciência.

Após dominar os métodos de Fermat e a matemática das probabilidades que evoluía desde Cardano, Pascal iniciou suas próprias investigações sobre o cálculo. Porém, foi a construção de seu triângulo a mola mestra para o estabelecimento do cálculo de Leibniz. De algum modo, Leibniz conseguiu relacionar o “triângulo aritmético” de Pascal e o seu “triângulo harmônico”.⁷²

⁷⁰ Também conhecido como “triângulo de Pascal”.

⁷¹ Na matemática, o método da recorrência trata-se de um método que tem por objetivo demonstrar uma certa propriedade que possui todos os inteiros naturais. O método da recorrência propõem-se a demonstrar alguns pontos específicos, a saber: a) a propriedade é satisfeita pelo inteiro 0; e b) se a propriedade é satisfeita por um certo número inteiro n , então ela é satisfeita por seu sucessor, $n + 1$. Uma vez estabelecida, pode-se concluir que a mesma é verdadeira para todos os números inteiros naturais.

⁷² Também conhecido como “triângulo de Leibniz”.

Dessa relação, emergiu a solução para várias séries convergentes e infinitas, cujas respostas pendiam em correspondências que envolveram Pascal e Fermat.⁷³ Assim foi a relação entre os dois triângulos que levou Leibniz a entender que a tangente de uma curva poderia ser estabelecida tornando os eixos x e y tão pequenos quanto se quisesse. Esse resultado foi exposto por Pascal, no texto *Traité des sinus du quart de cercle*, de 1654, da seguinte forma: a área sobre a curva poderia ser calculada pela soma de quadrados infinitamente pequenos, ou seja, pelo processo de quadratura.⁷⁴ O termo “quadratura” é um termo tradicional para a área, visto que a integral é geometricamente interpretada como a área sob a curva $y = x$. Tradicionalmente, os casos importantes são $y = x^2$, a quadratura da parábola, conhecida na antiguidade, e $y = 1/x$, a quadratura da hipérbole, cujo valor é logarítmico.

Assim sendo, apresentarei a você, caro leitor, um pouco mais a dinâmica dos triângulos, de Pascal e de Leibniz. Ora, o “triângulo de Pascal” ou “triângulo aritmético”, apresentado no texto *Traité du triangle arithmétique*,⁷⁵ também ficou conhecido pela sua afirmação explícita do “princípio da indução matemática”, é formado por coeficientes binomiais e possui um grande número de propriedades interessantes. Utilizando-se uma notação

⁷³ “Pascal [...] em 1654, que, em correspondência com Fermat, ele o assistiu na formulação de algumas ideias que levaram a Teoria Matemática das Probabilidades.” (SIMMONS, 1987, p. 703).

⁷⁴ Em outras palavras, esse processo geraria quadrados igualmente pequenos, finos, à medida que os eixos se movessem, um em direção ao outro. Nesse processo, os quadrados sobre a curva também se moveriam, permitindo que áreas formadas por curvas complexas se tornassem simples de serem calculadas. Observa-se que esse é o mesmo movimento feito pelos triângulos.

⁷⁵ “Tratado do triângulo aritmético”.

as entradas de fila no triângulo são coeficientes binomiais, ou seja, os números na fila n são os coeficientes das potências de a na expansão $(a + 1)^n$.

A seu turno, o “triângulo de Leibniz” é de longe menos conhecido que o de Pascal, embora diga respeito a este de forma muito simples. Senão, vejamos: uma fileira do “triângulo de Leibniz” começa com o inverso do número da linha ou o número da linha mais 1, dependendo se começa a contar a partir de 1 ou 0. Como cada entrada é a soma dos dois números imediatamente abaixo dele, as entradas podem, assim, ser calculadas sequencialmente da esquerda para a direita e, de cima para baixo, usando subtração em vez de adição.

Por exemplo, na quinta linha,

$$1/20 = 1/4 - 1/5, 1/30 = 1/12 - 1/20, 1/20 = 1/12 - 1/30, 1/5 = 1/4 - 1/20.$$

Não obstante, embora haja assimetria de construção, o triângulo é simétrico em relação ao seu eixo vertical. A sequência das segundas entradas: $1/2, 1/6, 1/12, 1/20, \dots$ formam séries telescópicas, ou seja:

$$\begin{aligned} 1 / (1 \cdot 2) + 1 / (2 \cdot 3) + 1 / (3 \cdot 4) + 1 / (4 \\ \cdot 5) + \dots = \\ (1/1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + (1/3 - 1/4) \\ + (1/4 - 1/5) + \dots, \end{aligned}$$

Nelas todos os termos, eventualmente, podem se anular, exceto o primeiro, 1. O primeiro termo da primeira linha é a soma dos segundos termos de todas as linhas começando com a segunda. Essa propriedade é generalizada, do seguinte modo: o último termo na n -ésima

linha é a soma dos $(n + 1)$ -ésima termos de todas as linhas que começam com o $(n + 1)$ -ésima. Por exemplo:

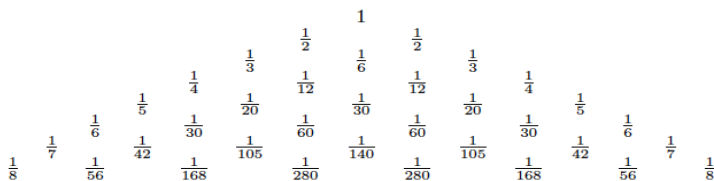
$$\begin{aligned} 1/2 &= 1/3 + 1/12 + 1/30 + \dots \\ 1/3 &= 1/4 + 1/20 + \dots \\ 1/4 &= 1/5 + \dots \end{aligned}$$

O enésimo elemento, m , na enésima linha do triângulo Pascal, n , é igual ao coeficiente binomial $C(n, k)$, onde a contagem começa a partir de 0. Assim, a entrada correspondente ao triângulo de Leibniz é o recíproco de $(n + 1)C(n, k)$.

Na ideia fundamental do cálculo de Leibniz, considerando tudo isso apresentado, é possível ver com clareza a mão de Pascal, ou melhor, as marcas de Pascal nas mãos de Leibniz. O grande passo de Leibniz reside em observar que sendo A, B, C, D, E uma sucessão crescente de números e, L, M, N, P a sucessão das diferenças, então $E - A = L + M + N + P$. Para chegar a essa conclusão, Leibniz considerou o “triângulo de Pascal”. Não obstante, pude observar, junto aos artefatos de Pascal, que Leibniz não considerou somente a ideia de Pascal, mas em seu triângulo ele utilizou frações, que o remeteram a somas infinitas, pois quanto mais termos contivessem, menor se tornaria o último valor da sequência precedente. Desse modo, Leibniz foi capaz de deduzir resultados do tipo:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{\frac{(n(n+1)(n+2))}{2}} + \dots = \frac{1}{2}$$

No triângulo harmônico, esse resultado era enxergado da seguinte maneira:



Esquema 2: Triângulo Harmônico

O interessante era que multiplicando essa série por 3, Leibniz conseguia reescrevê-la do seguinte modo:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \dots = \frac{3}{2}$$

Ao transferir esse resultado para a geometria, Leibniz considerou uma curva definida num intervalo, dividida em subintervalos e levantou ordenadas y_i para cada x_i da divisão. A exemplo de seu “triângulo”, ao somá-las, encontrei que a sucessão de diferenças das ordenadas é igual à sucessão original das ordenadas. A extrapolação desse resultado, combinado à outra digressão de Leibniz, não muito aparente, levará ao somatório dos infinitamente pequenos. O que você pode perceber aqui, como já destaquei, são marcas de Pascal sobre o cálculo de Leibniz. Não apenas de Pascal, mas também de Sluse, Hudde, Descartes, Fermat.

Huygens ficava com muita satisfação a cada correspondência trocada com Leibniz ao perceber seus resultados. Percebia, em Leibniz, as marcas dos atores (des)conhecidos do cálculo. No entanto, Huygens percebia também que Leibniz não apenas repetia os cálculos desses atores, mas criava o seu cálculo. Um cálculo criado junto aos restos dos atores (des)conhecidos dos cálculos. Os restos, quando jogados no terreno, na superfície, na

extremidade, tem essa potência. A de criação. A de fundar o outro de todos os mundos. Um mundo real, fictício, imaginário, real... real... Real como estar com a cabeça na lua. Um mundo na lua.

Antes que chegue ao fim das linhas que tenho me comprometido neste texto, contarei a você, amigo leitor, sobre outra experiência. O que torna inaugural este livro é, também, a experiência. Não apenas pela experiência dos atores (des)conhecidos dos cálculos, mas também pela experiência deles mim. Território, terreno e superfície que sou. Terreno de traços a esmo, tortos, assimétricos e... Enfim, encontrei-me com van Heuraet. Holandês, amigo de Hudde e, do mesmo modo, discípulo de van Schooten. Apesar da obra de van Schooten ser curta, pois morreu jovem, deixou alguns discípulos que muito produziram na matemática. A van Heuraet, por exemplo, atribui-se estudos sobre pontos de inflexão e um tratado sobre a retificação de curvas, apontado como sua principal obra. O estudo e o tratado foram publicados por van Schooten, que, recordando, também publicou *A Geometria* de Descartes em latim, com dois textos anexos de Hudde. Em carta ao astrônomo francês Auzout, datada de 13 de fevereiro de 1659, vanSchooten declara:

[...] além disso, muito recentemente, ele [van Heuraet] inventou um método (como ele me mostrou em carta), com o qual ele pode retificar inúmeras curvas absoluta e perfeitamente. Isso ele explicou tão lúcida e brevemente que ele dificilmente utilizou duas páginas para o trabalho inteiro. Ademais, seu método era tal que o que foi dito sobre a quadratura da hipérbole resultou disso sem problemas como se fosse um corolário [...] Seu método de transformar curvas já está impresso e irá sair qualquer dia, se Deus quiser, junto com a primeira parte de *A Geometria* de Descartes. (VAN SCHOOTEN *apud* van MAANER, 1983, p. 23).

O problema da retificação das curvas não é novo. Desde a antiguidade, na geometria, a questão do comprimento de um arco foi simples de ser concebida, intuitivamente. Exemplificando, a ideia de arco corresponde a de uma linha no espaço e seu comprimento pode ser visto como o comprimento de um fio, tomado de ponta a ponta, exatamente no espaço por ele ocupado. Assim, o comprimento de um arco ou é um número positivo ou é infinito, pois não há comprimento negativo. Um exemplo antigo é o semicírculo de raio r , onde r é um número real positivo. O comprimento desse semicírculo é igual a πr . Um exemplo ainda mais simples é dado por um segmento que tem um comprimento igual à distância entre as suas duas extremidades.

Um progresso teórico importante foi o trabalho de Arquimedes. Para ele, um polígono convexo, cujos vértices são os pontos da circunferência, tem o perímetro mais curto do que o da circunferência, o que dá um limite inferior para π . Por outro lado, um polígono convexo regular, onde cada aresta média é um ponto do círculo, tem o perímetro maior. Se Arquimedes não pôde provar essa proposição, é porque ele não tinha uma definição do comprimento de um arco que lhe permitisse atingir esse feito. De acordo com van Maanen, “O método que ele [van Heuraet] utilizou [...] lembra fortemente a quadratura da parábola de Arquimedes [...] Provavelmente, van Heuraet tentou aplicar o método de Arquimedes na curva de Sluse [...]” (VAN MAANEN, 1983, p. 9).

Ao chegar em minha casa, estudando o método de Arquimedes, percebi que o mesmo é geral para todos os arcos, pois a convexidade está sempre localizada no mesmo lado, isto é, o arco é composto apenas de um ponto de fronteira com a superfície convexa. Portanto, qualquer linha poligonal, cujo vértice está situado sobre o arco, tem um comprimento menor do que este e isso fornece um

limite inferior. Pode-se, então, construir uma série de linhas poligonais de comprimentos crescentes, p_n , todas menores que o comprimento do arco. Em seguida, constrói-se uma série de linhas poligonais fora da superfície convexa, cujas extremidades são os parâmetros da linha poligonal, cada vez mais próximas do arco. Seleciona-se o comprimento P_n e diminui-se dele cada comprimento que é maior do que o do arco. Os únicos valores possíveis para o comprimento de arco situam-se no segmento $[P_n, p_n]$. O conjunto é construído de modo que a distância entre P_n e p_n seja cada vez menor ao ponto que para qualquer número ε positivo, existe um valor de n tal que $P_n - p_n$ é estritamente inferior a ε . A interseção de todos os intervalos $[P_n, p_n]$ é reduzida a um ponto, que é, necessariamente, o comprimento do arco. Esse método é conhecido como “método de exaustão” e, através dele encontrou-se o valor aproximado de π igual a 3,14163.⁷⁷ O “método de exaustão” foi muito utilizado até ao final do século XVII, pois ele permitiu encontrar outros resultados relevantes para o estabelecimento dos cálculos, como o comprimento de um arco da espiral logarítmica, determinado por Torricelli, em 1640.

No século XVII, uma nova abordagem toma forma através do estudo da parábola semicúbica de $cy^2 = x$. Por volta de 1660, esse famoso problema interessou a muitos matemáticos. A questão do cálculo do comprimento de um arco, foi então chamada de “problema da retificação” e, frequentemente, era considerado impossível de ser solucionado. Wallis publicou uma solução em 1659 e a

⁷⁷ Na produção matemática de diversas existências, houve diferentes maneiras de definir e medir o comprimento de um conjunto de arcos. Arquimedes utilizou o método da exaustão para calcular um arco circular e, já no século XVII, Cavalieri desenvolveu uma nova abordagem graças ao próprio Arquimedes e ao cálculo aplicado à astronomia de Kepler.

atribuiu a Neile. A solução do “problema da retificação” levou à construção de valores mais precisos para a régua e o compasso, ou seja, o renascimento da esperança de resolver o problema da quadratura, ou área, do círculo. Essa solução foi reproduzida por van Heuraet no mesmo ano, com um método de correção da parábola e com o cálculo da quadratura da hipérbole. Em 1660, Fermat generalizou essa abordagem, porém sem desconhecer ou ignorar a solução de van Heuraet. Sobre a solução de van Heuraet, van Schooten declarou “Eu não conheço alguém até agora que tenha encontrado tais coisas [como van Heuraet encontrou] imediatamente e de tal modo.” (VAN SCHOOTEN *apud* van MAANER, 1983, p. 17).

Cerca de vinte anos mais tarde, um passo de gigante foi dado, quando Leibniz publica seu cálculo, indicando, em linguagem moderna, a relação entre a derivada e integral. Assim, o comprimento L de um arco percorrido numa distância s , num intervalo $[a, b]$, a curva $f(s)$, no ponto s é igual a:

$$L = \int_a^b f(s) ds$$

Se E é um plano euclidiano, a função f pode ser expressa utilizando duas funções de coordenadas de I em \mathbb{R} , representadas pelos símbolos $x(s)$ e $y(s)$. Se as coordenadas são expressas numa base ortogonais e se $]a, b[$ é o intervalo, a fórmula acima torna-se:

$$L = \int_a^b \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right)^{1/2} ds$$

E, em três dimensões, sob as mesmas hipóteses, a fórmula é:

$$L = \int_a^b \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right)^{1/2} ds$$

Esse foi o resultado que Leibniz chegou, em condições e linguagens bem mais rudimentares, mas sem a retificação da parábola e da hipérbole de van Heuraet, isto é, as marcas de van Heuraet, dificilmente ele teria tido sucesso. Antes ainda de finalizar, trarei a esta superfície uma exploração que fiz nas paredes já manchadas de minha casa. Uma exploração matemática dos passos de van Heuraet, ou melhor, das marcas, pegadas, deixadas no terreno. Marcas de seu método e de suas conclusões.

De família abastada, van Heuraet não teve problemas para se dedicar à matemática sem ter que se preocupar com sua sobrevivência. Seu primeiro ensaio, *De transmutatione curvarum linearum in rectas*,⁷⁸ mostrou que, para construir um segmento de reta igual a um arco em comprimento, basta calcular a área sob o arco. Sobre o conteúdo desse texto, van Schooten comenta: “E disso nós aprendemos que o comprimento da curva parabólica não pode ser encontrada, a menos ao mesmo tempo que a quadratura da hipérbole é encontrada, e vice-versa.”. (VAN SCHOOTEN *apud* van MAANER, 1983, p. 43).

⁷⁸ “Sobre a transmutação das curvas em linhas retas”.

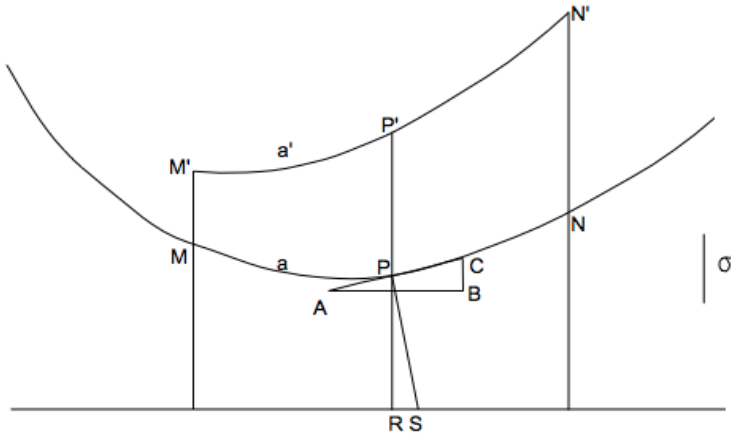


Figura 6: Descrição da retificação de van Heuraet

Se tomarmos um ponto arbitrário P sobre o arco MN da curva μ , o comprimento da normal poderá ser determinado pelo método de Descartes. Porém, pelo método de van Heuraet, uma nova curva μ' pela proporção $P'R:PS:PR$ onde P' está associado a P . Ao desenhar o triângulo diferencial ABC , ele nota que $PS:PR = AC:AB$, ou melhor, na notação atual, $AC = ds$ e $AB = dx$, logo $P'R:PS = ds:dx$, pois a soma das tangentes infinitesimais sobre a curva MN dá o comprimento de MN . Assim, $MN = \text{área sobre a curva } \mu' \text{ entre } M' \text{ e } N'$. Assim:

$$PS = \int_a^b P'R \, dx = \int_a^b PS \frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{2} \, dx$$

lembrando que a e b são as coordenadas x de M e N .

Van Heuraet demonstrou seu procedimento para a parábola semicúbica $y^2 = x^3$. Primeiramente, ele utilizou o método da normal de Descartes e calculou que a equação que tem uma raiz dupla é $x^3 + x^2 - 2vx + v^2 - n^2 = 0$.

Em seguida, pela regra de Hudde, ele descobriu a raiz dupla e multiplicou os termos da equação para obter $3x^3 + 2x^2 - 2vx = 0$. Utilizando o raciocínio já indicado, o comprimento da parábola semicúbica é:

$$((b + 4/9)3 - 8/27$$

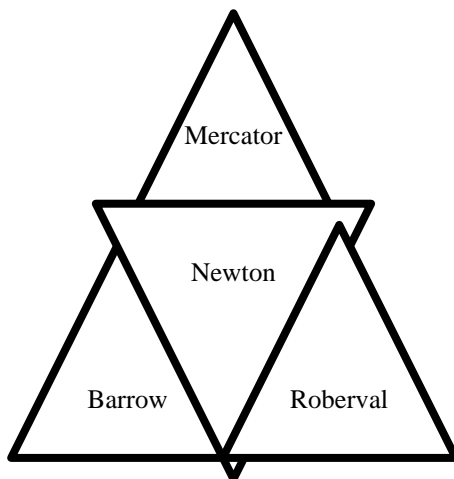
Rapidamente, van Heuraet observou que o mesmo raciocínio poderia ser aplicado para $y^4 = x^5$, $y^6 = x^7$ e assim sucessivamente. E, por fim, aplicou o resultado para $y = x^2$, problema que não havia sido resolvido satisfatoriamente até então. Seu método foi amplamente divulgado e utilizado, principalmente a utilização do triângulo diferencial que aparece nos artigos de Leibniz algumas décadas depois.

Com tudo isso, é preciso que você perceba, também, leitor, o quanto as marcas são potentes para a criação. O que estou a dizer aqui é, sobretudo, sobre as marcas de experiências. De atores (des)conhecidos dos cálculos que atravessaram territórios, terrenos, e deixaram ali suas marcas para então, acontecer o que é conhecido como Cálculo Diferencial e Integral.

CAPÍTULO 4

Atravessando territórios, o sobressalto do olho: (des)conhecendo Newton

Diagrama 3: Matemáticos que atravessaram o território-Newton na invenção de seu cálculo



Eu vinha lhe falando, caro leitor, desse negócio de território, superfície e, em algum momento, até falei de extremidade. Quero que você – visita que me afugenta em minha casa – sente-se aqui comigo. Aqui mesmo, entre. Sente-se. Apenas tenha cuidado com estes rabiscos que estão jogados no canto deste estrado velho. Mas não deboche de meu estrado, tenho muito apreço por ele. É casa de coveiro, lembra? Lembre-se, também, de que não sou seu amigo, apesar de às vezes lhe chamar de amigo. Talvez seja o mau hábito educado ou a solidão que, às vezes, me assola. Melhor, prefiro que seja apenas um

(des)conhecido em minha casa. Aceita um café, uma água? Bom, é o que tenho a oferecer. Café, água. Nada mais. Outra coisa, não avilte meus traços. Meus rabiscos. Sei que são tortos, assimétricos. Eu gosto assim, apesar de eu me sacrificar, todos os dias, indo ao cemitério. Eu já disse, tornou-se um ritual. Mas é que, fora dele, outras barbáries acontecem. Ahh... como eu gosto de ser barbarizado. Essa coisa selvagem, que estraçalha, que rasga e destrói. Isso sim me afeta. Mas (quem) interessa por esses afetos? É, isso não é assunto para aqui, né? Uma pena, mas confesso a você que muitos são os afetos que acontecem aqui. Só não sei se você os percebe, pois também não sei com que *olho* vê. Mas o que tem a ver o olho que vê? O olho vê palavras mal ditas, uma não história mal contada e um monte de outras coisas que já venho falando. Mas o que mais pode o olho? Antes que eu fale daqueles negócios que destaquei quando adentrava aqui, quero falar de seu olho.

Seu olho me incomoda. Me perturba. Vejo suas pálpebras vibrando. Não só suas pálpebras, mas também as veias que distribuem sangue por ele. Ahh... este olho. Claro que eu não tenho coragem de dizer isto a você em voz alta, por isso murmuro dentro de mim a inquietação que me enlouquece com este olho. Louco? Não, eu não sou louco. Desde que chegou aqui, desde quando olhou para meu estrado, estou percebendo este olho. É que “[...] um de seus olhos [parece] o de um abutre - um olho azul claro coberto por um véu.” (POE, 2007, p. 175). Este olho me perturba. Este olho vibrante. Que vibra junto a cada acontecimento aqui. É que este seu olho provoca isso que chamamos de loucura, mas não sou louco. Sou apenas um moço, recebendo um velho sentado em meu estrado. Ele não aceitou café, nem água. Seu olho fica estatelado provocando em mim todos estes sentimentos. Esse terror. Ahh ... que terror maldito. Preciso me livrar disso, preciso me livrar deste olho. É que o olho vibra junto ao seu corpo. Vibra junto aos acontecimentos. Olho maldito, olho

vibrante, olho inquieto,... Eu quero gritar, berrar, fazer com que minha voz chegue às profundezas do inferno. Eu preciso, mas não posso. Olho enlouquecedor.

Seu olho parece um *antropófago*. Mergulha, melhor, devora o mundo e é devorado por ele. O *outro de todos os mundos*. Sua presença aqui me incomoda, mas ainda é dia. Preciso recebê-lo, preciso ser condescendente. Sei que ele ficará aqui por muito tempo, ou pelo menos até o momento que começar aquela angústia, agonia, de sair saltando pela rua em direção a um ato fúnebre. Ele é afetado por essas coisas. Entra noite e sai noite este olho permanece constantemente estatelado. Não estou sendo irônico com ele, estou sendo comigo mesmo. Este mau disfarce que carrego de livrar-me deste olho. Ahh... olho maldito. (Mal)dito.

Ele começou a mexer com meus papeis, meus rabiscos. O olho fita aquela escrita e – como num alvoroço atômico de partículas, moléculas, átomos e elétrons – ele vibra incessantemente. Sinto o nervosismo em mim. Eu sei, ando nervoso. Muito nervoso. Mas não podes me chamar de louco. Poderia ser eu um louco? Não, eu não sou louco e saberáa que não sou louco. Louco é este olho. Olho devorador. Agirei naturalmente como se nada me incomodasse. Ele quer falar algumas coisas. Sua face já marcada pela velhice – como Mocinha, Margarida⁷⁹ -, olhos lacrimejantes e um sorriso ricto no rosto ele diz: no território, na superfície as coisas acontecem. É o fora. O outro de todos os mundos. O desdobramento do real no imaginário, a (ir)realidade, pois “[...] estar fora é alcançar o esplendor do impessoal, dessa neutralidade que nos lança em nós para fora de nós.” (LEVY, 2011, p. 49). É que “[...] tudo se encontra na mesma superfície, num mesmo plano.”

⁷⁹ Conto de Clarice Lispector “A viagem a Petrópolis” no livro *A Legião Estrangeira*.

(LEVY, 2011, p. 36). No território.⁸⁰ O que não se pode dizer da exterioridade, que devém forma. “Os códigos e os territórios, as linhagens de clãs e as territorialidades tribais organizam um tecido de segmentaridade relativamente flexível.” (DELEUZE, 1995-1997, p. 68) Quanto de forma existe aqui? Que forma isto possui? Forma-livro... Forma. Quanto de forma isto é forma/do?

Com sua voz embargada ele se cansa de falar. É mesmo um velho. Ou talvez seja eu apreendendo ele com suas falas já sem sentidos. Deformáticas, caóticas. Coisa de velho, coisa de velho. Tento me convencer disto, mas a presença dele me incomoda. Eu preciso acabar com este terror. A noite se aproxima e será a partir de hoje que inicio meu ritual. Este de todas as noites o espionar enquanto dorme, mirando com um raio fino de luz aquele olho que está sempre a dormir. Sinto que ele está aflito, sinto pelo alvoroço do seu coração. Um medo perpétuo o assola. E tenho certeza que ele tem ciência de que todas as noites eu o visito no quarto. Maldita visita. Maldito velho. Maldito olho. Mas, para que ele não perceba, para que ele pense que está tudo normal, eu o trato com gestos cordiais.

Não quero que ele lhe conte mais nada. Não posso permitir que ele faça isso. Por isso, pego todos estes arquivos, estas noções velhas e rabiscadas e as descrevo a

⁸⁰ “Mas, desestratificada, desterritorializada por si mesma, a máquina abstrata não tem forma em si mesma (muito menos substância) e não distingue em si conteúdo e expressão, ainda que presida fora de si a essa distinção, e a distribua nos estratos, nos domínios e territórios. Uma máquina abstrata em si não é mais física ou corpórea do que semiótica, ela é diagramática (ignora ainda mais a distinção do artificial e do natural). Opera por matéria, e não por substância; por função, e não por forma. As substâncias, as formas, são de expressão "ou" de conteúdo. Mas as funções não estão já formadas "semioticamente", e as matérias não estão ainda "fisicamente" formadas. A máquina abstrata é a pura Função-Matéria — o diagrama, independentemente das formas e das substâncias, das expressões e dos conteúdos que irá repartir.” (DELEUZE, 2012, p. 84-85).

ocê como se deve ser feito. Nada além daquilo que é. São apenas túmulos. É apenas um trabalho. Não pode ser um ritual. Não se pode mais viver deste jeito. Portanto, será assim. Como deve ser feito.

Vejo aqui que o cálculo de Newton começou na Inglaterra, provavelmente, quando ele ingressou no Trinity College, Huygens apresentou-lhe a edição holandesa de *A Geometria* de Descartes e inúmeros trabalhos de Fermat. Pelo diagrama apresentado na abertura desse livro, observa-se que *A Geometria* de Descartes e os escritos de Fermat foram obras que influenciaram tanto Leibniz, quanto Newton, mas os trabalhos de Roberval, Mercator e Barrow estão intimamente ligados somente ao estabelecimento do cálculo de Newton. Assim, falaremos deles agora.

Ainda na mesma época que Descartes publicava *A Geometria*, outro matemático descobriu um método diferente de tratar o problema da tangente. Trata-se de Roberval, que baseou seu método na cinemática, determinando a curva tangente através de um ponto em movimento. No entanto, esse método apresentava um problema, visto que um ponto em movimento descreve uma trajetória geométrica. Isso era justamente o que Descartes e Fermat estavam buscando abandonar, pois o que se ansiava na época era estabelecer um procedimento algébrico que pudesse determinar a tangente. Por outro lado, você pôde ver que os procedimentos algébricos de Descartes e Fermat eram muito complicados, logo, a ordem do dia era encontrar um modo de facilitá-los.

Apesar de ter nascido no campo, em uma localidade chamada Roberval, com o nome de Gilles Personne,⁸¹ Roberval deixou sua aldeia muito jovem para completar sua educação. Em Bordeaux, conheceu Fermat e, em La Rochelle, conheceu Descartes. Ao chegar em Paris, entrou em contato com outros estudiosos como

⁸¹ Gilles Pessoa ou Gilles Ninguém.

Mersenne, Pascal, Torricelli, Huygens, Gassendi e Hobbes. Roberval obteve sua cátedra de filosofia em 1631 e, em 1634, após o exame de admissão no prestigioso Royal College, passou a ocupar a cadeira de matemática e obteve a permissão para usar o nome de Gilles Personne de Roberval. Seus cursos foram muito bem-sucedidos e, por isso, logo ocupou uma terceira cadeira, o que o obrigou a uma atividade muito intensa. Ele ensinou aritmética, geometria, astronomia, óptica, mecânica e música. Mesmo com tantas atribuições, em 1637, ele escreveu o seu *Traité des Indivisibles, Tratado dos Indivisíveis*, em que apresentou pela primeira vez a área sob a cicloide.⁸² Vale ressaltar que algumas cadeiras do Royal College eram renováveis a cada três anos, inclusive a cadeira de matemática, mas isso não o impediu de ocupá-la por mais de 20 anos, fazendo um concurso após outro. Nessas décadas, correspondeu-se com o padre Mersenne e Torricelli e foi muito ativo em debates científicos, ao atacar impiedosamente seus contemporâneos franceses Descartes,⁸³ Fermat e Pascal. Em 1655, ele obteve a sucessão da cátedra de Gassendi que não estava sujeita a renovações.

Infelizmente, seu temperamento explosivo e as suas origens modestas, somados aos seus modos rústicos e dificuldades de fala, o prejudicaram. Como se não bastasse, Roberval foi muito criticado na academia por escrever alguns tratados para artesãos em linguagem simples, mas, mesmo assim, fez parte dos sete estudiosos que, em 1666,

⁸² “Reconhece-se nos enunciados de Roberval sobre os indivisíveis numerosas antecipações do cálculo integral, onde alguns são equivalentes à determinação das integrais definidas de funções algébricas e trigonométricas.” (BOYER *apud* VERLEY, 1949, p. 6).

⁸³ Entre Roberval e Descartes, existia um sentimento de má vontade, devido ao ciúme despertado pela crítica que Descartes fez a alguns dos métodos utilizados por ele no *Tratado dos Indivisíveis*. Isso o levou a criticar e opor-se aos métodos analíticos que Descartes introduziu na geometria.

fundaram Academia Real de Ciências. Em 1669, desenvolveu um projeto que traduzia uma aplicação criteriosa da regra das forças que ele tinha demonstrado alguns anos antes em um de seus tratados. Roberval fez significativas contribuições para a física do século XVII e XVIII, pois suas ideias sobre a mecânica e astronomia podem ser vistas e reconhecidas nas obras de Newton. Ele, precisamente, definiu a palavra “força” e demonstrou sua regra de composição, além de corrigir a definição do conceito do centro de gravidade. No campo experimental, Roberval teria feito a primeira experiência decisiva que provava a existência da pressão e do peso do ar. Suas contribuições matemáticas ilustram o vínculo inseparável existente entre a física⁸⁴ e a matemática. Nessas ciências, estudou e inventou uma classe de linhas curvas e também descobriu um método de derivar uma curva por meio de zonas finitas que pode ser obtida igual às áreas entre certas curvas e suas assíntotas, a qual chamamos hoje, na geometria, de “curvas robervalianas”. Roberval teria também secretamente, com ajuda de Mersenne, desenvolvido o “método dos indivisíveis”, que usou para estudar a quadratura de várias curvas e calcular volumes de sólidos gerados por rotação ou revolução de curvas. É bom que você saiba que Roberval era um daqueles matemáticos que, pouco antes da invenção do cálculo infinitesimal, ocupou sua atenção com problemas que só seriam solúveis, ou poderiam ser mais facilmente resolvidos, por algum método que envolveria limites ou infinitesimais. Utilizando seu “método dos indivisíveis”, Roberval trabalhou intensamente na quadratura de superfícies e na cubagem de

⁸⁴ Como resultados de trabalhos de Roberval fora da matemática pode-se notar um trabalho sobre o sistema do universo, em que ele suporta o sistema heliocêntrico de Copérnico e atribui uma atração mútua para todas as partículas de matéria, além da invenção de um tipo especial de equilíbrio, o “Balanço de Roberval”, também conhecido por Newton.

sólidos, mas perdeu muito do crédito da descoberta já que manteve seu método para seu próprio uso, enquanto Cavalieri publicava um método similar inventado de forma independente.

Basicamente, no que tange o cálculo de Newton, o maior feito de Roberval foi conseguir determinar a área sob uma cicloide, utilizando o seu “método dos indivisíveis”,⁸⁵ pois uma cicloide nada mais é que uma curva traçada por um ponto situado em uma circunferência que rola, por assim dizer, ao longo de uma linha reta. Grosso modo, um corpo colocado em um ponto da circunferência traçada por uma cicloide representa, fielmente, um corpo em movimento, conceito base do cálculo newtoniano. Simplificando e modernizando a letra de Roberval, conforme *Tratado dos Indivisíveis*, considero que o diâmetro AB do círculo AGB se mova ao longo da tangente AC , permanecendo sempre paralelo a si mesmo, até chegar a CD e, que AC seja igual à semicircunferência AGB . Simultaneamente, que o ponto A se mova sobre AGB de tal modo que a velocidade de AB ao longo da tangente AC possa ser igual à velocidade A ao longo da semicircunferência AGB . Então, quando AB alcançar CD , A terá também alcançado D ; logo, o ponto A tem dois movimentos, a saber: o seu próprio na semicircunferência AGB e o do diâmetro ao longo da tangente AC .

⁸⁵ A definição do “método dos indivisíveis”, na letra de Roberval, é: “Para tirar conclusões pelo método dos indivisíveis, é preciso supor que toda linha, seja reta ou curva, pode ser dividida em uma infinidade de partes ou pequenas linhas todas iguais entre elas, ou que seguem entre elas uma tal progressão como se queira, como entre o quadrado do quadrado, ou segundo qualquer outra potência. Ora, conquanto toda linha termina por pontos, em lugar de linhas, nos serviremos de pontos; e, pois, em lugar de dizer que todas as pequenas linhas estão para uma tal coisa em uma certa razão, nós diremos que todos esses pontos estão para uma tal coisa na razão dita.” (ROBERVAL, 1637, p. 190).

Em seu método, descrito detalhadamente no *Tratado dos Indivisíveis*, Roberval começou dividindo o eixo AC e a semicircunferência AGB em um número infinito de partes iguais. Ao longo da semicircunferência essas partes eram AE, EF, FG etc. E, ao longo do eixo AM, MN, NO etc. Uma vez que o movimento que gera a cicloide era composto de movimentos iguais ao longo da semicircunferência e do eixo, Roberval simplesmente assumiu que $AE = AM, EF = MN$ etc. e, como o ponto A estava em E quando a base do diâmetro estava em M , o ponto M_2 cuja distância horizontal é a mesma que a de E do ponto E_1 no eixo, seria um ponto na cicloide. A mesma regra se aplica aos outros pontos, N e F, O e G, P e H etc. Dando prosseguimento ao seu método, Roberval construiu uma nova curva através dos pontos M_1, N_1, O_1 etc. com as mesmas coordenadas de M e E . Essa nova curva pode ser vista hoje como $x(t) = at, y(t) = a(1 - \cos t)$ ou $y = a(1 - \cos x/a)$, em que a é o raio do círculo.

Para determinar a área sob a metade de um arco da cicloide, Roberval começou a determinar que a área entre a cicloide e sua companheira é igual à metade do círculo gerador. Isso resulta no princípio de Cavalieri, o qual, conforme já mencionado, levou a maior parte da glória do método dos indivisíveis, porque Roberval escondeu esse trabalho. Concluindo seu cálculo, Roberval observou que cada linha VZ na região $ACDM_1$, correspondia uma linha igual WY em AM_1DB ; logo, a nova curva corta em duas partes o retângulo $ABCD$. Como a área do retângulo é $2\pi a^2$ ou o produto entre a semicircunferência e o diâmetro, a área da nova curva é πa^2 . Segue-se que a área sob a metade de um arco da cicloide é igual a $3/2$ da do círculo gerador.

simples. Roberval também tinha o desejo de popularizar a ciência e assim o fez em tratados pouco considerados pela academia, como já comentamos, e, do ponto de vista filosófico, ele deu fé àquilo que só poderia ser testemunhado pelos sentidos, ou seja, era um empirista convicto. Essa posição filosófica lhe valeu os títulos de libertino e deísta e, por fim, tornou-se precursor dos filósofos do Iluminismo. No entanto, sobre sua matemática, ou melhor, sua física-matemática pode-se afirmar que era nada menos que ousada, a ponto de ter influenciado Newton e muitos outros membros da Royal Society.⁸⁶

Do mesmo modo que Roberval, Mercator também mudou seu nome e, em vida, era igualmente conhecido como Kauffman, visto que seu nome original remetia à forma latina de “mercador”, pouco adequado para um matemático. Quando trabalhou na Universidade de Copenhague, por volta de 1651, publicou uma série de trabalhos sobre trigonometria esférica, geografia e astronomia, entre os quais destacamos o *Trigonometria sphaericorum logarithmica*.⁸⁷ Essa obra tratava da tabulação dos logaritmos das funções seno, cosseno, tangente e cotangente em intervalos de 1° , e mostrou como resolver problemas envolvendo triângulos, usando funções logarítmicas. Outras publicações como *Rationes Mathematicae Subductae*,⁸⁸ de 1653, definia a distinção entre os números racionais e irracionais apontando que na música proporções

⁸⁶ Em um tratado *Observations sur la composition des mouvements, et sur le moyen de trouver les touchantes de lignes courbes, Observações sobre a composição dos movimentos, e sobre o modo de encontrar as tangentes das linhas curvas*, ele [Roberval] considera toda curva como trajetória de um ponto móvel e toma por axioma só a direção do movimento e também a da tangente.” (BOYER *apud* VERLEY, 1949, p. 6).

⁸⁷ “*Trigonometria das esferas logarítmicas*”.

⁸⁸ “*Cálculos de razões matemáticas*”.

racionais levavam a harmonia enquanto as irracionais conduziam a dissonância. Mais uma vez, Mercator deu um exemplo astronômico, cujas proporções racionais correspondiam à estrutura de Kepler do sistema planetário dada em termos de poliedros regulares, enquanto proporções irracionais correspondiam aos movimentos observados.

Depois de trabalhar na Universidade de Copenhagen por seis anos, Mercator teve que sair quando a universidade foi fechada devido a uma praga. Assim, ele foi para a Inglaterra e logo começou a trocar ideias com Collins. Sua primeira publicação em mais de dez anos, a sua primeira na Inglaterra, foi *Hipótese Astronômica Nova*,⁸⁹ publicada em Londres, em 1664, no qual ele combinou teoria das órbitas elípticas com outras ideias de Kepler. Provavelmente, através da leitura desse texto que Newton soube que Kepler havia observado que as órbitas dos planetas eram elípticas.

Contudo, sua grande descoberta, fundamental para o estabelecimento do cálculo, foi a série, às vezes, chamado de “série de Mercator”:

$$\log(1 + x) = x - x^2 / 2 + x^3 / 3 - x^4 / 4 + \dots$$

Ele a publicou em *Logarithmotechnia, Técnicas logarítmicas*, em 1668.⁹⁰ No ano de 1670 seguinte, Mercator traduziu o texto

⁸⁹ “*Nova hipótese astronômica*”

⁹⁰ Sobre essa obra, Newton diz que “[...] quando apareceu a obra engenhosa de Mercator, intitulada *Logarithmotechnia*, eu comecei a fazer menos delas [figuras], supondo que ele conhecia a extração das raízes tão bem quanto a resolução das frações em série pela divisão, ou outra, tendo por ele esse último método, encontrado todo o resto. Quando esse livro apareceu [...], o doutor Barrow, meu amigo, então professor de matemática em Cambridge, comunicou ao M. Collins um escrito de minha autoria, um tratado breve sobre essas séries, no qual eu comunico que as áreas e os comprimentos de todos os tipos de curvas,

sobre álgebra de língua holandesa *Algebra Ofte Stel-konst*,⁹¹ de Kinckhuysen para o latim.⁹² Isso aproximou Mercator e Newton e eles trocaram cartas, discutindo, entre outras coisas, o movimento da lua. Mercator publicou um novo trabalho em dois volumes em astronomia *Institutiones Astronomicae, Instituições astronômicas*, em 1676. Esses textos foram muito bem escritos, pois traziam o conhecimento mais recente sobre o assunto. Newton leu essas obras e utilizou seus resultados.⁹³

A relação existente entre logaritmo e a área da hipérbole era de conhecimento de Mercator. Por essa razão, ele decidiu calcular o $\log(1 + x)$ utilizando essas séries infinitas. O método de Mercator era relativamente complexo, mas foi ainda mais simplificado por Wallis.⁹⁴

assim como as superfícies e os volumes dos sólidos engendrados por elas, podem ser determinados em função de linhas retas dadas reciprocamente [...]” (NEWTON *apud* MICHAUD, 1843, p. 630). A influência da obra de Mercator sobre Newton é patente, e o tratado que ele se refere é o famoso *De Analysis per aequationes numero terminorum infinitas, Sobre a análise do número infinito de termos das equações*.

⁹¹ “*Algebra frequentemente contida num conjunto*”

⁹² “[...] Mercator foi convidado pelo Senhor Brouncker para preparar uma tradução latina do mesmo [*Algebra Ofte Stel-konst*]. Para esta, Isaac Newton, a pedido de Isaac Barrow e John Collins, acrescentou notas explicativas e comentários, e o manuscrito foi enviado para Collins em Londres em 11 de julho de 1670. O rascunho de Newton, embora ainda não publicado, foi preservado, mas a tradução original de Mercator acreditava-se que estavam perdidas.” (SCRIBA, 1964, p. 45).

⁹³ É importante observar que Leibniz também usufruiu das descobertas logarítmicas de Mercator e lhe agradeceu em vários textos matemático para os quais sua descoberta foi fundamental.

⁹⁴ Sobre Mercator e Wallis na quadratura da hipérbole: “Um esforço adicional combinado entre Nicolas Mercator [...] e John Wallis [...] destrinchou [o problema de] a quadratura da hipérbole. [...] O argumento apresentado [...] [vem de] uma carta escrita por Wallis que simplificava a prova original de Mercator [...].” (PERKINS, 2012, p. 63). E, “Na questão das quadraturas, o trabalho de Wallis teve importantes repercussões. [...] Nicolaus Mercator encontrou a

Mercator dividiu o intervalo $[0, x]$ em n subintervalos de comprimento x/n e aproximou A pela soma:

$$x/n + x/n(1/1 + x/n) + x/n(1/1 + 2x/n) + \dots + x/n(1/1 + (n-1)x/n)^{95}$$

Em suma, $\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots$, se $n = \infty$ e, assim, ele escreve a equação da hipérbole $y = 1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ ⁹⁶

Já a influência de Barrow com relação a Newton foi maior em extensão que a de Mercator, visto que ele foi professor de Newton em Cambridge.⁹⁷ Provavelmente, Barrow tenha apresentado a Newton obras de vários matemáticos pouco conhecidos na Inglaterra, pois viveu em vários países do continente, antes da publicação de seu livro *Lectiones Geometricae*, em 1670. Essa obra continha uma coleção de palestras matemáticas proferidas por ele. Pode-

quadratura da hipérbole [...] [e] publicou seu método no seu *Logarithmotechnia* [...]. Wallis revisou o livro na *Philosophical Transactions* [...].” (STEDALL, 2002, p. 31).

⁹⁵ Ressaltamos que cada termo $1/1 + (kx/n)$ é a soma da série geométrica $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{kx}{n}\right)^j$

⁹⁶ Cabe aqui um reforço sobre a relação entre Newton e a obra de Mercator. Tudo leva a crer que Newton aprendeu, com o *Logarithmotechnia* de Mercator, a quadratura da hipérbole e também como lidar com séries infinitas.

⁹⁷ No “Postscript”, Child mencionou comentários de outros historiadores da relação entre as obras de Barrow e Newton. Um deles, Whewell, em seu livro *Mathematical Works of Isaac Barrow, Trabalhos matemáticos de Isaac Barrow*, de 1860, afirma que “A força só atua em dois pontos; um, é claro, é o triângulo diferencial; o outro é o “modo de encontrar as áreas das curvas, comparando-as com a soma dos paralelogramos inscritos e circunscritos, abrindo o caminho para o método de Newton fazer o mesmo, dada na primeira seção do *Principia*.” (WHEWELL *apud* CHILD, 1916, p. 228).

se dizer que Newton foi seu protegido e tirou o máximo proveito disso, no bom sentido, visto que Barrow o preparou e deixou um vasto legado acadêmico para ele, incluindo sua cátedra. Embora não haja provas de que Newton tenha assistido às conferências de Barrow, a ideia de curvas geradas pelo movimento de um ponto no espaço, conceito base que diferencia seu cálculo do de Leibniz, indica uma forte participação de Barrow na construção do cálculo de Newton.⁹⁸ Contudo, de certo mesmo, sabe-se que Newton sugeriu algumas implementações de cunho algébrico, no método de cálculo das tangentes, com base no triângulo diferencial, as quais Barrow acatou. O método sugerido por Newton era de cunho matemático e não estava ligado ao conceito base que se encontra por trás do “Teorema Fundamental do Cálculo”, isto é, trata-se de álgebra pura.⁹⁹

O historiador Child, tradutor do inglês da obra matemática de Barrow, além de escrever uma “Introdução”, um “Poscript” e inúmeras notas, se propõe a explicar o trabalho de Barrow fazendo um contraponto entre seu método e o de outros matemáticos. Dessa perspectiva, vê-se também a influência de Descartes e de Fermat sobre sua obra, além da de Newton. De Descartes, Barrow toma as equações das curvas e, de Fermat, o método da *adigualdade*, que ele altera sem qualquer

⁹⁸ É possível que essa ideia tenha vindo da obra de Roberval, com a qual certamente Barrow teve contato em suas andanças.

⁹⁹ O comentador Child acredita, realmente, que Leibniz tenha usurpado a ideia do cálculo de Newton. Porém, contrariando algumas histórias, Child acredita que o suposto furto de Leibniz tenha ocorrido através das obras de Barrow, publicadas antes das dele. Para Child, em sua visita a Inglaterra, Leibniz teria comprado a obra de Barrow, já corrigida por Newton e nela encontrou pistas fortes do cálculo. Ora, discordamos veementemente dessa teoria, pois os cálculos, apesar de chegarem aos mesmos resultados, demonstram conceitos diferentes como ponto de partida.

explicação, e, de Newton, a sugestão de usar os métodos de Descartes e Fermat. Só que, em relação a Newton, a via do conhecimento possuiu uma “mão dupla”. Seguem as regras de Barrow:

Embora eu mal os conheça [os métodos de Descartes e Fermat], eu os utilizei porque fui aconselhado por um amigo [Newton] e porque parece ser mais rentável e geral do que aqueles que eu tenho discutido. Sejam AP, PM duas linhas retas dadas em posição, da qual PM corta uma determinada curva em M . Deixe MT supostamente tocar a curva M e cortar a linha reta em T , a fim de encontrar a quantidade de linha reta PT ; eu desenho um pequeno arco, indefinidamente, MN , da curva; então eu desenho NQ, NR paralelo a MP, AP . Eu chamo $MP = mt, PT = t, MR = a, NR = e$, e outras linhas retas, eu comparo MR, NR (e através deles, MP, PT) um com o outro por meio de uma equação obtida por cálculo; contudo, observando as seguintes regras.

REGRA 1. No cálculo, omito todos os termos que contém uma potência de a ou e , ou produtos desses (por estes termos que não têm nenhum valor).

REGRA 2. Após a equação formada, rejeito todos os termos que consistem em letras que denotam quantidades conhecidas ou determinadas ou termos que não contenham a ou e (para esses termos, trazido para um dos lados da equação, será sempre igual a zero).

REGRA 3. Eu substituo m (ou MP) para a , e t (ou PT) para e . Assim, finalmente a quantidade de PT é encontrada. Além disso, se qualquer arco de curva indefinidamente pequeno entrar no cálculo, uma indefinidamente pequena parte da tangente, ou de qualquer linha equivalente direto para ele (por conta do indefinidamente pequeno tamanho do

arco) é substituído pelo arco. (BARROW, 1916, p. 120-121).

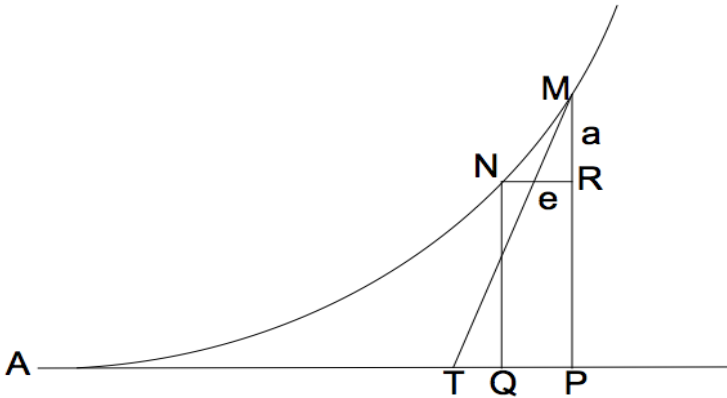


Figura 8: Descrição do triângulo diferencial de Barrow

Agora, a análise de Child sobre o escrito de Barrow:

Barrow dá cinco exemplos disso, o método do “triângulo diferencial”. Como seria de se esperar, duas dessas curvas são bem conhecidas, isto é, o *Folium* de Descartes, chamado por Barrow de *La Galande*, e a Quadratrix; um terceiro é o caso geral das curvas de quasi-circulares $x^n + y^n = an$; o quarto e quinto são as curvas aliadas $r = a \cdot \tan\theta$ e $y = a \cdot \tan x$. É digno de nota, em conexão com a minha sugestão de que Barrow utilizou métodos de cálculo para obter suas construções geométricas, que ele já deu uma construção puramente geométrica para a curva $r = a \cdot \tan\theta$ em Lect. VIII, §18,¹⁰⁰ se as linhas dadas estão supostamente em ângulos retos. (CHILD, 1916, p. 121).

¹⁰⁰ “Deixe DB, VK serem duas linhas dadas na posição, e deixe a curva de NYX ser tal que, se do ponto D uma linha reta DYH é desenhada, cortando a linha reta BK em H e a curva DYX curva em Y , a corda DY é sempre igual a linha reta BH ; é necessário desenhar a linha

De acordo com Child, há de se considerar três pontos: a) o papel fundamental de Newton ao destacar os métodos de Descartes e Fermat; b) o uso efetivo dos métodos das tangentes de Descartes e Fermat; e c) o não reconhecimento nominal de nenhum desses atores.

Retomando a trajetória de Barrow para o estabelecimento do *Teorema Fundamental do Cálculo*, os estudos de Gregory, publicados na obra *Geometriae pars universalis*,¹⁰¹ de 1668, somados às sugestões de Newton sobre os métodos de Descartes e Fermat, apresentados anteriormente, além de ter experimentado a matemática francesa, alemã e holandesa, lhe proporcionou um esboço mais geral, do que o proposto por Gregory, do *Teorema Fundamental do Cálculo*. Isso foi mostrado na “Conferência X”, cujo título era *Rigorous determination of ds/dx . Differentiation as the inverse of integration. Explanation of the ‘Differential Triangle’ method; with examples. Differentiation of a trigonometrical function*,¹⁰² proposição 11. Nela, Barrow expôs seu teorema:

Seja ZGE uma curva cujo eixo é AD; e sejam as ordenadas aplicadas a esse eixo, AZ, PG, DE, continuamente aumentadas a partir da ordenada inicial AZ; também seja AIF uma linha tal que, se qualquer linha reta EOF é traçada perpendicularmente a AD, cortando as curvas nos pontos E, F, e AD em D, o retângulo contido por DF e um dado comprimento R é igual ao espaço

tocando a curva *DYX* em *Y*. Com o centro *D* e raio *DB*, descreva o círculo *BRS*; deixe *YER*, desenhado paralela a *KB*, encontrar o círculo em *R*; junto *DR*. Então, $RY : YD = YD : DE$; assim, a linha reta que toca a curva *DYX* pode ser encontrada [...]” (BARROW, 1916, p. 98).

¹⁰¹ *Partes da Geometria Universal*.

¹⁰² “Determinação rigorosa de ds/dx . Diferenciação como o inverso da integração. Explicação do método do ‘Triângulo Diferencial’; com exemplos. Diferenciação de uma função trigonométrica.”

interceptado ADEZ; também seja $DE : DF = R : DT$, e junte-se FT. Então TF irá tocar a curva AIF. (BARROW, 1916, p. 137).

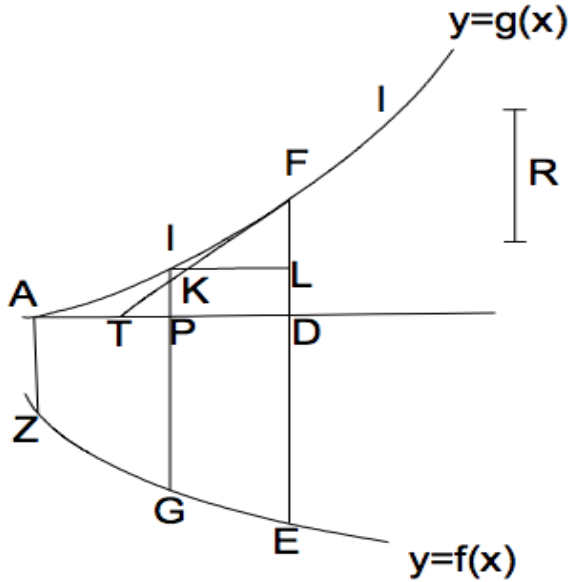


Figura 9: Descrição do Teorema Fundamental de Barrow

Barrow tomou uma curva qualquer ZGE , que pode ser escrita como $y = f(x)$, e dela construiu outra $AIF = (g(x))$ Tal que $Rg(x)$ era sempre igual à área limitada por $f(x)$ entre um ponto fixo e a variável x . Modernamente:

$$Rg(x) = \int_a^x f(x) dx$$

Desse modo, Barrow atestou que o comprimento da subtangente $a g(x)$ é dada por $Rg(x)/f(x)$, ou que:

$$d/dx \int_a^x f(x) dx = f(x)$$

Barrow provou seu resultado geometricamente, mostrando que a reta TF encontra-se sempre fora da curva. Assim, se I é um ponto na curva $g(x)$, no lado de F , em direção a A e, se IG for desenhada paralelamente a AZ e, KL paralelamente a AD , a curva revela que $LF : LK = DF : DT = DE : R$ ou, $R.LF = LK.DE$. Visto que, $R.IP$ corresponde à área de $APZG$, segue-se que $R.LF$ corresponde à área de $PDEG$. Portanto, $LK.DE = \text{área de } PDEG < PD.DE$. Desse modo, $LK < PD$ ou $LK < LI$ e a tangente está abaixo da curva em I . O mesmo argumento pode ser utilizado para um ponto I no lado de F , longe de A .

Na “Conferência XI”, *Change of the independent variable in integration. Integration the inverse of differentiation. Differentiation of a quotient. Area and centre of gravity of a paraboliform. Limits for the arc of a circle and a hyperbola*,¹⁰³ proposição 19, estava a prova da segunda metade do *Teorema Fundamental do Cálculo*, que mostrava a existência de uma correspondência entre os retângulos infinitesimais sob a curva $Rf'(x)$ e o retângulo $R(f(b) - f(a))$:

$$\int_a^b f'(x)dx = R(f(b) - f(a))$$

A exemplo de outros, não se sabe ao certo como Barrow teria chegado a esse resultado. Segundo Mahoney, “Também falta discussão sobre, até concernente ao espectro de aplicabilidade das transformações apresentadas. Não há exemplos de como aplicar as proposições aos problemas concretos, especialmente àqueles nos quais a relação entre a ordenada e a abscissa não é algébrica.” (MAHONEY, 1990, p. 238). Porém, o historiador Child, na sua “Introdução”, seguiu algumas pistas, apresentadas

¹⁰³ “Mudança da variável independente na integração. Integração do inverso da diferenciação. Diferenciação de um quociente. Área e centro de gravidade de uma forma parabólica. Limites para o arco de um círculo e uma hipérbole.”.

em conferências diferentes daquela onde o *Teorema Fundamental do Cálculo* foi apresentado. Por exemplo, na “Conferência I”, *Generation of magnitudes. Modes of motion and the quantity of the motive force. Time as the independent variable. Time, as an aggregate of instants, compared with a line, as the aggregate of points. Deductions.*,¹⁰⁴ Child apontou como Barrow pensava no movimento de um ponto, enquanto um gerador de curvas e, na nota do “Apêndice II”, da “Conferência XII”, *General theorem of ratification*, disse que “Barrow usa o corrente método de traduzir o erro de cada retângulo através do diagrama para somá-los no último triângulo.” (CHILD, 1916, p. 173). De qualquer modo, o grande resultado de Barrow foi comprovar que a inclinação da reta que tange um ponto P , com relação a uma curva gerada pelo movimento de um ponto, era igual à velocidade do ponto em movimento em P ¹⁰⁵, e o próprio Barrow explicou sua teoria:

Conseqüentemente, se através de todos os pontos de uma linha que representa o tempo são traçadas linhas retas, assim dispostas, tal que uma não coincide com a outra (ou seja, linhas paralelas), a superfície do plano resultante da soma das linhas retas paralelas, quando cada uma representa o grau de velocidade correspondente ao ponto através do qual ele é desenhado, corresponde exatamente ao agregado dos graus de velocidade e, portanto, mais convenientemente, podem ser adaptadas para representar o espaço percorrido também. (BARROW, 1916, p. 39).

¹⁰⁴ “Geração de grandezas. Modos de movimento e a quantidade da força motriz. Tempo como a variável independente. O tempo, como um agregado de instantes, em comparação com uma linha, como o agregado de pontos. Deduções.”

¹⁰⁵ Para Child (1916), a ideia de representar a distância como a área sob uma curva de velocidade não é original de Barrow.

Assim é *certo* fazer. Aquele velho, com aquele olho, não entende como se deve fazer. Tudo isso está acabando como meu trabalho. Confesso, fiz isso enquanto ele dormia, adormecia sob o efeito daquele chá. Isso eu fiz todas as noites antes de espreitá-lo a dormir. À espera de encontrar, à noite, aquele olho aberto. “Meu sangue se enregelava sempre que ele caía sobre mim; e, assim, pouco a pouco, bem lentamente, fui-me decidindo a tirar a vida do velho e, assim, libertar-me daquele olho para sempre.” (POE, 2007, p. 175). Por isso que, todas as noites, este ato ricto me tomou. Eu precisava me livrar daquele olho, daquele velho. Então eu o espreitava no início de um novo dia, na madrugada. Antes de o galo cantar...

[...] seu olho, você – seu *corpo vibrátil* – é tocado pelo invisível, e sabe: aciona-se, já, o primeiro movimento do desejo [...] E seu corpo vibrátil vai mais longe: tais intensidades, no próprio momento em que surgem, já traçam um segundo movimento do desejo, tão imperceptível quanto o primeiro [...] Esses dois movimentos – toda uma subconversa – só são apreensíveis por seu olho vibrátil, ou melhor, por todo aquele seu corpo que alcança o invisível. Corpo sensível aos efeitos dos encontros dos corpos e suas reações: atração e repulsa, afetos, simulação em matérias de expressão. (ROLNIK, 2014, p. 31, grifos da autora).

Aquele olho tinha essa potência. A de ser atravessado por afetos. A de afetar. A de vibrar... A de me aterrorizar. Olho que, com brilhos lacrimejosos, acompanhava os movimentos do desejo. As entrelinhas que (des)conheciam atores dos cálculos. Que (des)conhecia Leibniz e Newton. Quero, ainda, lhe mostrar que não sou louco. E saberás disso quando souberes o destino daquele olho, daquele velho. Velho coveiro.

CAPÍTULO 5

Para não concluir: uma abertura “inter-séculos”

O velho coveiro começou com uma retomada estratégica “inter-séculos” e, ainda que eu não concorde com as flangens dele, há de se perceber que, com a ruptura da Idade Média e o desabrochar da Renascença, uma matemática aconteceu. Foram acontecimentos, rupturas históricas, e não uma linearidade de ideias. O que pude perceber, e quero acreditar que você também percebeu, é que esses acontecimentos se deram junto às demandas mercantilistas, associadas ao uso das máquinas e sua necessidade de aperfeiçoamento contínuo. O uso de máquinas não era exatamente uma novidade, pois, na antiguidade, Arquimedes já fazia uso delas. Mas não do mesmo modo que eram utilizadas nessa ruptura histórica, pois o uso delas provocou também uma ruptura. Herão, por exemplo, desenhou inúmeras máquinas, mas como a vida urbana, do modo como fora nos séculos aqui explorados, não houve interesse na antiguidade, tampouco na Idade Média: esses objetos serviam somente para outras necessidades, uma vez que o trabalho no campo era prioritário. Já no fim da Idade Média, transição para o Renascimento, pequenas manufaturas começaram a surgir e, com elas, ampliou-se o uso das máquinas. Outro negócio rentável, onde o uso das máquinas se encaixavam com perfeição, era a exploração mineral. Contudo, a perspectiva de um lucro fácil e as guerras representam os maiores estímulos ao desenvolvimento mecânico.

Sobre essas máquinas, destacamos as bombas hidráulicas, as armas de fogo, os moinhos de vento, a construção naval e o aperfeiçoamento dos relógios. Porém, o importante é entendermos que elas conduziram ao

aprofundamento dos estudos da mecânica teórica, e, com ele, o estudo do movimento, do espaço, do tempo, das mudanças como um todo. Os estudos sobre a estática que existiam desde a antiguidade, aos poucos foram progredindo e acrescidos por estudos que envolviam o movimento, as mudanças. Os feitos e descobertas de Da Vinci e de Galileu, entre tantos outros grandes nomes, acrescidos pelo interesse crescente de traduções latinas de grandes obras, como as de Arquimedes e Herão, estimularam os estudos teóricos. Os estudos matemáticos que até então tentavam seguir o modelo dos antigos, formal e rigoroso, como a geometria euclidiana, necessitavam urgentemente de uma atitude menos rígida e mais intuitiva. Todavia, a nova ordem matemática teria que ser bem mais conclusiva e assertiva que anterior. Assim, todos esses fatores contribuíram decisivamente para explicar o que começou a acontecer no século XVI, ainda de forma discreta, quando os “arquimedianos”, matemáticos estudiosos da obra de Arquimedes, começaram a pensar efetivamente numa nova matemática.

Todavia, a coroação dessa nova matemática, que se revela no cálculo infinitesimal, nos cálculos de Leibniz e Newton, deu-se, efetivamente, somente a partir das descobertas ou invenções do século XVII, com Descartes, Fermat, Hudde, Sluse, Cavalieri, Pascal, van Heuraet, Roberval, Mercator e Barrow. Outros tantos matemáticos participaram dessa gloriosa jornada, mas, como dissemos anteriormente, são desses nomes que nossa não história sobre os atores (des)conhecidos dos cálculos falou!

Indo um pouco mais a fundo, a evolução dos cálculos de Leibniz e Newton, além destes serem considerados o marco zero para uma nova compreensão e renovação da matemática, ocorreu num ambiente onde a quebra dos últimos grilhões do pensamento aristotélico era mister. Aristóteles era apegado às qualidades e à teleologia das coisas, da natureza, ou seja, às características impróprias

para um mundo, cujo florescer de um cálculo infinitesimal se fazia cada vez mais e mais urgentes. Como a medição, a engenharia, o cálculo e a quantidade eram as novas *palavras de ordem* do século XVII, um novo método que aproximaria o homem da natureza teria que ser rapidamente efetivado e, conseqüentemente, uma nova matemática deveria surgir. Portanto, farei uma (re)tomada estratégica dos atores (des)conhecidos.

Ao apresentar os atores (des)conhecidos dos cálculos, iniciei, com a intromissão daquele velho e de vários outros: nossa jornada rumo aos cálculos de Leibniz e Newton começa com Descartes e sua *A Geometria*, publicada originalmente como um dos três apêndices do *Discurso do Método*, em 1637. Descartes havia tomado como sua missão filosófica descobrir um método geral de pensamento capaz de facilitar as descobertas e encontrar as verdades nas ciências, sendo que, em sua época, as únicas ciências conhecidas que possuíam alguma relevância, pois estavam intimamente ligadas ao desvendar dos segredos do universo, eram a astronomia e a mecânica, ciências de base matemática. Além disso, a matemática com suas proposições e provas indiscutíveis se constituía no melhor exemplo de verdade que se podia querer, pois, consigo, elevava a astronomia e a mecânica ao mesmo patamar incontestável, já que essas dependiam da matemática para se fazerem ver e entender. Sendo assim, a filosofia mecanicista de Descartes parecia se inspirar em Platão, visto que ambos acreditavam na harmonia universal, fundada num método ultrarracional, no qual a matemática reinava, sozinha.

Portanto, foi com esse espírito que Descartes publicou *A Geometria*. Em outras palavras, essa obra nada mais era que uma aplicação de um método geral, unificador da álgebra e da geometria, que resultava em uma geometria

analítica.¹⁰⁶ Para Pickover, “Descartes foi inovador em sua proposta para unir a álgebra e a geometria em um mesmo assunto.” (PICKOVER, 2009, p. 136). Graças a Descartes, esse importante ramo da matemática nasceu e se desenvolveu. No entanto, outro matemático trabalhou nesse mesmo viés, e também em outros, ou seja, no estabelecimento da geometria analítica, mas, principalmente, na teoria de números, ferramenta essencial para os cálculos de Leibniz e Newton: falamos agora de Fermat.

Segundo o historiador Pickover:

No início dos anos de 1600, Pierre de Fermat, um advogado francês e matemático, fez brilhantes descobertas em teoria de números e em outras áreas da matemática. Seu manuscrito de 1636 *Ad locos planos et sólidos lisagoge* vai além do trabalho de René Descartes na geometria analítica e permite a Fermat definir um estudo de curvas muito importante que incluía a cicloide e a espiral de Fermat. (PICKOVER, 2009, p. 132).

Conforme mostrado anteriormente, a diferença entre Descartes e Fermat, no que tange à geometria analítica, reside no seguinte ponto, a saber: Descartes propôs representar uma curva através de uma equação, em seguida, estudar essa equação e descobrir tudo o que for possível sobre essa equação, principalmente as propriedades da curva que essa equação representa.

Já Fermat, apesar de ter feito substancialmente a mesma coisa, determinou que a equação era em si mesma uma propriedade específica da curva e, daí, derivou todo o resto, todas as outras propriedades da curva. Nota-se que a

¹⁰⁶ Apolônio esboçou o que seria um sistema de coordenadas na definição de suas seções cônicas, tanto assim que o próprio Descartes faz uso desses esboços ao concretizar essa ideia.

diferença entre os dois métodos é sutil, mas, ao mesmo tempo, determinante de dois estilos matemáticos que iriam influenciar tanto Leibniz quanto Newton. Nas palavras do historiador Smith, “Em conexão com seu estudo sobre curvas, Fermat procedeu aplicar a ideia de infinitesimais a questões de quadratura e máximos e mínimos, assim como no desenho de tangentes.” (SMITH, 1951, p. 378). Todavia, aos trabalhos de Descartes e Fermat, faltavam ainda alguns detalhes metodológicos que serviriam de base para os futuros cálculos infinitesimais. Surgem, então, as contribuições de Hudde e Sluse.

Hudde foi um matemático de quem pouco se sabe, pois, ao contrário de seus contemporâneos, não se correspondeu muito com seus pares. Ele tinha um interesse particular pelo cálculo dos máximos e mínimos de uma curva e pela teoria de equações. Escreveu apêndices para a tradução para o latim de *A Geometria* de Descartes, editada por van Schooten. No que tange à teoria de equações, Hudde conseguiu separar em fatores um polinômio, o qual ele igualou a zero.

A seu turno, Sluse era um religioso convicto, também apreciador da matemática. Mesmo assim, sua contribuição para a geometria das espirais e métodos matemáticos são de grande importância. Sua maior contribuição foi a invenção de um método geral para determinar os pontos de inflexão de uma curva. Em outras palavras, ele desenvolveu um método de construção de raízes de equações determinadas pela interseção de duas curvas, introduzindo uma variável auxiliar desconhecida cuja eliminação reproduziria a equação primitiva. Esses resultados foram apresentados em 1659, mas, em 1668, ele publicou outra obra que continha esses mesmos resultados e outros sobre espirais, quadratura da cicloide e outras curvas, pontos de máximos e mínimos, entre outros assuntos.

Todos esses grandes matemáticos tiveram suas contribuições a serviço tanto de Leibniz, quanto de Newton. A partir de agora, falarei das contribuições que foram direcionadas mais para Leibniz ou para Newton, a saber: Cavalieri, Pascal e van Heuert; e, Roberval, Mercator e Barrow, para Leibniz e Newton, respectivamente.

O aparecimento do livro de Cavalieri encorajou um grande número de matemáticos do século XVII a estudar problemas relativos ao infinitesimal. Os problemas fundamentais tenderam à abstração e à generalidade. Graças a Cavalieri, o problema da tangente que consistia em encontrar métodos para determinar a tangente em um dado ponto de uma curva foi se tornando cada vez mais importante, comparado com os antigos problemas relacionados aos volumes. Resumidamente, Cavalieri deu o primeiro passo rumo ao cálculo infinitesimal, pois sua nova geometria argumentava que toda figura plana seria formada por retângulos de largura infinitesimal, chamados primeiramente, por Galileu, mestre de seu mestre, de indivisíveis. Dessa forma, pode-se concluir que se duas figuras planas comprimidas entre retas paralelas formam uma relação constante, as áreas das figuras também possuem a mesma relação. Essa ideia de indivisível, proposta primeiramente por Galileu e trabalhada por Cavalieri, provocou muita discussão e críticas por parte de alguns estudiosos ligados ao assunto, mas, no fim, Cavalieri triunfou.

Um dos críticos de Cavalieri foi Pascal, apesar de ambos estarem na base do cálculo leibniziano. Segundo o matemático Thomas, “Blaise Pascal foi uma das mais talentosas e trágicas figuras em toda história do pensamento ocidental.” (THOMAS, 1987, p. 702). As contribuições matemáticas de Pascal são muitas, mas talvez a mais famosa seja o triângulo que leva seu nome, também conhecido como triângulo aritmético. A simplicidade do padrão matemático criado por Pascal é espantosa. Tudo se

resume a um simples algoritmo: cada número no triângulo é a soma dos dois números localizados acima dele. Vários matemáticos têm discutido a importância do triângulo de Pascal na teoria da probabilidade, na expansão de binômios, entre outros assuntos matemáticos. Segundo Pickover, “O matemático Donald Knuth uma vez indicou que existem tantas relações e padrões no triângulo de Pascal que, quando alguém encontra uma nova identidade, não há muitas pessoas que ficam entusiasmadas com isso, exceto aquele que descobriu.” (PICKOVER, 2009, p. 146). Foi esse triângulo uma das velas que iluminou Leibniz em sua caminhada rumo ao seu cálculo. Sobre as outras contribuições de Pascal, podemos também destacar seu ensaio sobre as cônicas e um teorema que leva seu nome.

Já van Heuraet, outro inspirador de Leibniz, foi o primeiro matemático a conceber uma maneira geral para dois problemas, a saber: o da retificação e o da quadratura das curvas. Basicamente, ele mostrou uma maneira de montar a equação da curva cuja área teria a mesma medida que o comprimento de uma curva dada. Como já mencionei algumas vezes, van Schooten editou e publicou uma tradução latina de *A Geometria*, de Descartes, que continha apêndices de De Witt, Hudde e van Heuraet. Na verdade, existem dois artigos de van Heuraet que aparecem como apêndices. Um deles dá a construção de pontos de inflexão na conchoide. Esse trabalho estava sendo realizado pelo grupo de pesquisa de van Schooten e foi muito importante para a matemática da época, pois as tentativas de descobrir as propriedades de curvas deste tipo levaram ao método que deu origem ao cálculo de Leibniz. O segundo dos dois artigos de van Heuraet é a carta de Saumur. Nela, van Heuraet fornece um método que reduz a retificação, para qualquer curva algébrica arbitrária, a retificação para uma quadratura de uma curva associada, que calcula a área sob uma curva associada. Isso foi particularmente importante, uma vez que, então,

acreditava-se que não era possível comparar o comprimento de um arco de curva com um segmento de linha reta. A obra de van Heuraet foi, portanto, importante no desenvolvimento da matemática.

Com van Heuraet, encerro minha retomada dos atores (des)conhecidos do que está sendo explorado, contado. Portanto, é chegada a vez de Roberval, Mercator e Barrow, complementando o cenário de Newton. Roberval, dos atores (des) conhecidos ligados ao cálculo de Newton, foi o que mais lhe forneceu subsídios. Segundo Scott, “Roberval olhou tanto na direção da tangente, quanto na direção do movimento de um ponto que descreve a curva.” (SCOTT, 1969, p. 141). Roberval imaginou um ponto que participava de dois movimentos. Desse modo, a velocidade relativa desse ponto dependeria da natureza da curva por ele traçada. A tangente, por sua vez, iria cair ao longo da diagonal do paralelogramo cujos lados adjacentes seriam proporcionais a essas velocidades. Porém, diferentemente de Newton, a Roberval faltou um método adequado para determinar essas velocidades. Newton conseguiu ir além, ao dividir as curvas em mecânicas e geométricas, e introduzir seu cálculo na solução. Mesmo assim, vale ressaltar que apesar de o maior interesse de Roberval ser a física, no que tange à matemática, ele escreveu belos tratados sobre o comportamento geométrico de várias curvas e uma álgebra sobre os indivisíveis.

Sobre Mercator, há poucos registros. Sabe-se que era alemão, lá foi educado e começou sua carreira em 1642, ensinando filosofia. Porém, foi em Copenhague, no continuar de sua educação, que ele se interessou pela astronomia e pela geometria. Logo se destacou e se mudou para Londres. Finalmente, como astrônomo e matemático, Mercator, antes de Leibniz, foi um pioneiro no uso de expansões em séries inteiras de uma função. Há quem o considere o inventor de sequências infinitas, mais conhecidas como séries, e o precursor de Newton nesse

campo, que declaradamente fez uso de seu trabalho. Mercator desenvolveu uma teoria de órbitas planetárias elípticas no sistema solar com o sol em um dos focos, confirmando o pensamento de Kepler. Em um tratado datado de 1668, considerado seu melhor trabalho, intitulado *Logarithmotechnia*, Mercator exhibe o desenvolvimento da série que leva seu nome para calcular a área sob a hipérbole. Assim, Mercator foi o primeiro a definir implicitamente o logaritmo natural, como parte integrante da função que representa a hipérbole.

Diferentemente de Mercator, sobre Barrow existe uma vasta rede de informações. Além de ser um proeminente filósofo e teólogo na Inglaterra do século XVII, teve a honra de ser professor de Newton, ajudando-o a desenvolver seus numerosos talentos. Posso resumir sua frutífera carreira do seguinte modo: foi professor de Geometria no Gresham College em 1662. Em 1670, renunciou ao posto em favor de Newton e dedicou-se à teologia. No período em que ocupou a cátedra de matemática, editou numerosos clássicos da geometria antiga, a saber: *Os Elementos* e *Data*, de uclides; os trabalhos de Arquimedes; *As Cônicas*, de Apolônio; entre outros. Suas próprias contribuições à ciência, particularmente à geometria, aparecem em suas palestras. Barrow criou um novo método para determinar tangentes e este se aproximava muito do método do cálculo de Newton. Nesse método, Barrow usou o “triângulo diferencial”, que ainda é essencialmente a base da diferenciação. Sobre esse método, Mahoney declara que “[...] o tratamento de Barrow para o método das tangentes foi muito significativo.” (MAHONEY, 1977, p. 238). Porém, sobre o próprio Barrow, Mahoney adverte que ele era “Competente e bem-informado, mas não particularmente original [...]” (MAHONEY, 1977, p. 240). Mesmo assim, sua contribuição para o desenvolvimento dos cálculos,

proveniente de suas palestras foram fundamentais para o cálculo de Newton.

Todas essas contribuições realizadas no século XVII, coroaram um dos feitos mais marcantes de toda história da ciência, a saber: a aplicação das doutrinas infinitesimais que mudaram os métodos matemáticos consolidando a ciência moderna. Em suma, o cálculo infinitesimal trata do infinitamente pequeno e de suas relações. Os conceitos e técnicas desse novo cálculo resultam de uma longa linha de desenvolvimento matemático, como já apontamos. Porém, acima de tudo e de todos, no ponto final das descobertas dos atores intermediários, encontram-se Leibniz e Newton. Segundo o historiador Schubing,

Com Leibniz e Newton, os fundadores do cálculo infinitesimal, o estudo do processo de limite adquire um novo caráter. Seus principais objetos não são mais quantidades estáticas como superfícies individuais ou volumes, mas principalmente as propriedades das curvas. (SCHUBING, 2005, p.161).

Leibniz nasceu em Leipzig e passou a maior parte de sua vida na corte de Hanover, servindo à nobreza de várias maneiras. Sua filosofia universalista abrangia conhecimentos diversos como história, teologia, linguística, biologia, geologia, matemática, física, alquimia, diplomacia, entre outros tantos saberes. Sua vida pode ser resumida pela procura de um método universal, através do qual todo e qualquer conhecimento pudesse ser obtido e compreendido. Essa *scientia generalis* tinha várias facetas e uma delas o levou ao campo das descobertas matemáticas e lógicas, além de criar uma vasta simbologia para atendê-las. Poucos filósofos entenderam tão bem a unidade entre a forma e o conteúdo como Leibniz, e seu cálculo deve ser

estudado e compreendido nessa ampla base filosófica e não dissociado dela. De acordo com a historiadora Baron,

Leibniz fez extraordinárias contribuições para a metafísica e a lógica, assim como para a matemática. Todas suas atividades eram sistematicamente inter-relacionadas e suas contribuições em um campo não podem ser plenamente apreciadas sem tomar em consideração todas suas outras atividades. Separar suas diversas produções é mutilar seus pensamentos. Para Leibniz a matemática era uma importante e fascinante atividade da mente humana e, desde seus dias de estudante, ele compartilhou a ideia de uma característica universal proximamente associada com uma linguagem e um simbolismo através do qual todo conhecimento poderia ser tomado em conjunto e relacionado através da análise de certos elementos lógicos primitivos. (BARON, 1969, p. 289-290).

O cálculo de Leibniz foi descoberto entre 1673 e 1676, em sua estada em Paris, sob a influência de Huygens que o estimulou a ler várias obras, principalmente *A Geometria* de Descartes. Além disso, é importante considerar – mesmo que já se tenha tratado disso anteriormente – que a influência de Huygens não apenas influenciou Leibniz a ler algumas obras, mas também a trabalhar em vários problemas que, posteriormente, foram reconsiderados em seu cálculo,¹⁰⁷ por exemplo, as sequências de diferenças, os

¹⁰⁷ Outra coisa que considero importante ressaltar é que o fato de dizer “cálculo *de* Leibniz” não significa que estou insinuando que o mesmo pertence a ele, pois a tentativa neste livro é mostrar que este dito cálculo “*de*” Leibniz é, também, *de* Cavalieri, *de* Pascal, *de* van Heuert, *de* vários. Pois tanto Leibniz quanto Newton, enquanto “inventores” do cálculo são, aqui, assumidos como territórios. Territórios de passagens, de acontecimentos, em que eles (os acontecimentos) depois de

triângulos característicos, a transmutação, entre outros. Vale ressaltar também que, enquanto as abordagens de Newton foram basicamente cinemáticas, as de Leibniz eram totalmente geométricas. Para o historiador Taton,

Ainda que Leibniz utilize crescimentos infinitamente pequenos (ou diferenciais) da variável e da função, Newton considera grandezas variáveis escoando com o tempo: variáveis fluentes e em estudar as velocidades ou fluxões. Seu método de fluxões, menos cômodo que o método leibniziano, foi pouco praticado pelos matemáticos. (TATON, 1969, p. 116).

Leibniz pensava em termos de um “triângulo característico”, dx, dy, ds , que já havia aparecido na obra de Pascal, um dos atores desconhecidos que tiveram uma grande influência nos rumos que o cálculo leibniziano tomou. A primeira publicação desse cálculo deu-se em 1684, na *Acta Eruditorum*, sob o título *Nova methodus pro maximis e minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*.¹⁰⁸

Apesar de esse artigo ser confuso e obscuro, ele já continha os símbolos e as regras atuais de diferenciação, incluindo $d(uv) = u dv + v du$ e o diferencial para o cociente com a condição $dy = 0$ para valores extremos e $d^2y = 0$ para os pontos de inflexão. Após a publicação desse artigo, Leibniz publicou outro, em 1686, com as regras do cálculo integral, contendo o símbolo \int . Com esse símbolo, Leibniz expressou a equação da cicloide:

atravessarem deixaram marcas e, junto a essas marcas, Leibniz e Newton produziram os seus cálculos, ou seja, suas singularidades.

¹⁰⁸ “Um novo método para máximos e mínimos, assim como para tangentes, que não é obstruído pelo uso de quantidades fracionárias ou irracionais, e uma curiosa espécie de cálculo para tal método.”

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

Assim, a partir desses artigos emergia um dos períodos mais repletos de acontecimentos matemáticos que vimos desde a antiguidade. Nossa notação do cálculo deve-se a Leibniz, bem como os nomes “cálculo diferencial” e “cálculo integral”, os termos “função” e “coordenadas”, os símbolos “=” para igualdade e “x” para multiplicação.

A seu turno, Newton era filho de um pequeno proprietário de terras no interior da Inglaterra. Ele estudou em Cambridge, tornou-se membro do Trinity College e, em 1669, foi nomeado professor, sucedendo Barrow, um dos atores (des)conhecidos de seu cálculo. Newton permaneceu em Cambridge até 1696, quando aceitou o cargo de guardião e, posteriormente, diretor da casa da moeda. Em 1705, foi feito cavaleiro e tornou-se Sir Newton. Sua grande autoridade e influência fundava-se em sua obra prima *Philosophiae naturalis principia mathematica*,¹⁰⁹ de 1687. Tratava-se de um volume enorme que estabelecia a mecânica sob uma base axiomática e continha a lei da gravitação. Assim, Newton demonstrou, através de uma matemática rigorosa, que as leis empíricas de Kepler sobre o movimento dos planetas se explicam por meio da lei da gravitacional dos inversos dos quadrados das distâncias e deu também uma explicação dinâmica de muitos aspectos do movimento dos corpos celestes e das marés. Ele resolveu vários problemas físicos até então sem solução.

Contudo, a forma geométrica de suas demonstrações não mostra claramente que Newton já tinha em mãos seu cálculo chamado de “teoria das fluxões”. Ele desenvolveu seu método geral entre os anos de 1665 e 1666, enquanto permanecia em sua terra natal, fugindo da

¹⁰⁹ Princípios matemáticos de filosofia natural.

peste que assolava Cambridge. Suas ideias sobre a gravitação universal data desse mesmo período. Sobre sua “teoria das fluxões”, esta estava intimamente ligada aos seus estudos sobre séries infinitas. Isso o levou a estender o teorema do binômio a expoentes fracionários e negativos, descobrindo as séries binomiais. Isso ajudou Newton a estabelecer sua teoria das fluxões para todas as funções algébricas ou transcendentais. Uma fluxão é expressa por um ponto em cima de uma letra, tem um valor finito, é uma velocidade. As letras sem ponto são os fluentes. Nas palavras do próprio Newton, em seu livro *The method of fluxions and infinite series*,¹¹⁰ de 1736,

Agora aquelas quantidades que eu considero como gradualmente e indefinidamente aumentando, eu devo aqui e depois chamar de Quantidades Fluêntes, ou Fluídas, e devo representá-las pelas letras finais do alfabeto v, x, y e z de modo que eu possa distingui-las das outras quantidades, que nas equações são consideradas como conhecidas e determinadas, e as quais portanto são representadas pelas letras iniciais a, b, c , etc. E as velocidades pelas quais todo Fluente é aumentado por seu movimento gerado, (o qual eu posso chamar de Fluxões, ou simplesmente velocidades ou celeridades) eu devo pelas mesmas letras com um ponto $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}$ e \dot{z} . Esta é a celeridade da quantidade v que eu devo colocar \dot{v} , e para as celeridades das outras quantidades x, y , e z , eu devo colocar \dot{x}, \dot{y} e \dot{z} respectivamente. (NEWTON, 1736, p. 20).

Os infinitesimais de Newton eram chamados de “momentos de fluxões” e eram representados por $\dot{v}0$, $\dot{x}0$, $\dot{y}0$ e $\dot{z}0$ sendo 0 uma quantidade infinitamente pequena. Infelizmente, seu método gerou uma série de

¹¹⁰ O método das fluxões e as séries infinitas.

confusões e críticas até que o conceito de limite fosse formalizado, já no século XIX. Mesmo assim, segundo Baron,

Através do estudo dos mais finos trabalhos matemáticos de seu tempo, Newton foi levado a fazer importantes e novas sínteses. Em vez de desenvolver isso plenamente e adquiriu maestria de técnicas analíticas inigualáveis no século XVII. Ele estava, portanto, apto a derivar importantes resultados através de processos que, comparados com o laborioso trabalho de seus contemporâneos, era simples e geral. Newton pensou analiticamente no sentido moderno e ele, portanto, ganhou uma enorme vantagem sobre muitos distintos contemporâneos. (BARON, 1969, p. 268).

Hoje, o cálculo invadiu todos os campos da ciência tornando-se fundamental para a biologia, química, física, economia, engenharia etc. Em qualquer área de saber onde há uma quantidade que varia, o cálculo está presente. O cálculo causou uma revolução na maneira de pensarmos o mundo, definitivamente.

No entanto, você pode está com uma dúvida depois de tudo isso, qual seja: se o cálculo é uma multiplicidade de produções das quais Fermat, Descartes, Mercator, van Heuraet, Sluse e outros que aqui foram explorados são responsáveis, por que em muitos discursos se assumem que o cálculo é uma invenção de Leibniz e Newton? Sobre isso, Baron considera que existem três argumentos, quais sejam:

(a) Os vários métodos infinitesimais dos predecessores de Newton e Leibniz eram muito restritos (eles muitas vezes foram aplicáveis somente para classes especiais de curvas) e não foram reconhecidas como inter-relacionados [...] (b) A coerência dos sistemas de Leibniz e Newton foi atingida devido ao reconhecimento do teorema

fundamental do cálculo: a relação inversa entre a diferenciação e a integração [...] (c) Newton e Leibniz inventaram um sistema de notação e de símbolos pelo qual podiam aplicar analiticamente seus métodos, quer dizer, pelo uso de fórmulas ao invés de figuras e a sua descrição verbal por argumentos geométricos. (BARON, 1969, p. 69).

Antes de eu continuar escrevendo sobre isso, quero contar a você o que aconteceu com o velho coveiro. Eu disse, no capítulo anterior, que eu não era louco e que eu lhe provaria isso. Eu apenas estive me sentindo angustiado com o olho daquele velho. Um olho que vibrava junto aos acontecimentos, pois aquela atitude dele, coveiro que era, fazia de mim um esquizofrênico e, por várias vezes, me percebi divagando em um plano imaginário que me incomodava. Aquele velho me atravessava e várias experiências me marcavam. Tudo isso me incomodava porque aquilo me tirava o chão. Não me dava segurança. Por isso, resolvi matá-lo.

Foi em uma daquelas noites. Eu estava, metodicamente, a vigiar o velho enquanto dormia. Vigiava-o à espera do momento profícuo para acabar com minha angústia. Com meu nervosismo. Queria acabar com a vida dele tão rápido quanto acabei com a vida do jovem professor a qual ele – o velho – insistia que fosse apresentado. É verdade, venho matando muitos por aqui, pois junto a este coveiro vieram outros, vários. Eram encontros e desencontros que faziam com que as pessoas dissessem que sou louco, mas eu não sou louco. É o que estou a te provar.

A noite, naquele dia, estava quente. Ou talvez fosse apenas o nervosismo que me fazia suar frio. Mas da porta eu não saí. Lá fiquei por várias horas, com uma lanterna na mão, a vigiar o velho coveiro. Eu sentia a tensão dele. Sentia porque o seu coração, batia aceleradamente e, ao bater, ecoava um som agonizante. Um som que não

consigo descrever, mas que era, cada vez mais, mais alto. Fiquei com uma sensação de medo, pois pensei que aquele som seria ouvido pelos vizinhos. Foi então que, ao perceber a hora certa, com uma corda no pescoço, sem tirar os olhos do velho coveiro que permanecia sobre minha vigilância, decidi que “seu olho não me perturbaria mais” e que eu precisava pular daquele velho estrado que arrastei até a porta para finalizar o meu ricto. O ricto do suicídio. Para matar o velho coveiro, precisei me matar. Matei os vários e só sobrou este que te escreve agora, e apenas agora, alguns questionamentos. Algumas questões para que você pense no que torna a linguagem do cálculo palavras de ordens. Quem o ordena a ordenar? O cálculo seria, então, palavras de poder? Qual o funcionamento das proposições e das demonstrações nessas palavras de poder que é o cálculo? Levando em consideração a afirmação de que:

[...] *não há Matemática sem demonstrações*; [pois] elas compõem parte da estrutura lógica essencial do que é constituída a Matemática e da maneira *como ela funciona*. [Além disso] as demonstrações são como rituais indispensáveis, usados para provar resultados, *garantindo que eles são válidos*. (FILHO, 2014, p. 101, grifo nosso).

Questiono: o que garante a validade do cálculo e o seu funcionamento são as demonstrações? Sendo assim, quem garante o funcionamento e a validade das demonstrações? Que matemática acontece sem demonstrações, sem a garantia de sua validade? Acontece essa matemática? Como ela funciona? Que cálculo acontece nas fissuras das preposições, das demonstrações? Os métodos dos predecessores de Leibniz e Newton eram restritos ou eram apenas o que o acontecimento permitia?

Além dessas, seria interessante trazer outros questionamentos para este solo, quais sejam: Leibniz e

Newton inventaram um sistema de notação de símbolos que visavam legitimar as palavras de ordem do cálculo ou para legitimar o cálculo? Quem ou o que legitima esse sistema de notações e de símbolos? Com esses questionamentos, um livro se encerra, uma poesia é lembrada e uma nova história se inicia.

A MATEMÁTICA QUE INSPIRA

Aula de Matemática (Tom Jobim)

Pra que dividir sem raciocinar
Na vida é sempre bom multiplicar
E por A mais B
Eu quero demonstrar
Que gosto imensamente de você

Por uma fração infinitesimal,
Você criou um caso de cálculo integral
E para resolver este problema
Eu tenho um teorema banal

Quando dois meios se encontram desaparece a fração
E se achamos a unidade
Está resolvida a questão

Prá finalizar, vamos recordar
Que menos por menos dá mais amor
Se vão as paralelas
Ao infinito se encontrar
Por que demoram tanto dois corações a se integrar?
Se desesperadamente, incomensuravelmente,
Eu estou perdidamente apaixonado por você

BIBLIOGRAFIAS E REFERÊNCIAS

Dicionário:

SCHWARTZMAN, S. **The words of mathematics**: an etymological dictionary of mathematical terms used in English. Washington: Mathematical Association of America, 1994.

Figuras:

KATZ, Victor J. **A history of mathematics**: an introduction. New York: Harper Collins, 1993.

Obras:

ANDERSEN K. **Cavalieri's method of indivisibles**. 1984. Disponível em: <<http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:K3b69rUBXsEJ:www.math.ist.utl.pt/~jroquet/Andersen.pdf+&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br>> Último Acesso: 31 jan 2016.

APOLLONIUS; VER ECKEL, P. **Les coniques**. Traduction Paul Ver Eecke. Paris: A. Blanchard, 1959. Livro I.

ARCHIMEDES. **The works of Archimedes**. New York: Dover, 1953.

AUGER, L. **Un savant méconnu**: Gilles Personne de Roberval, 1602-1675; son activité intellectuelle dans les domaines mathématique, physique, mécanique et philosophique. Paris: A. Blanchard, 1962.

AVRITZER, D. **Geometria analítica e álgebra linear**:

uma visão geométrica. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2009. Tomo I.

BADOIN, P. **Les ovales de Descartes et le limaçon de Pascal**. Paris: Vrin, 1938.

BALL, W. W. R. **A short account of the history of mathematics**. London: Macmillan, 1940.

BARON, M. E. **The origins of the infinitesimal calculus**. Oxford: Pergamon Press, 1969.

BARON, M. E.; BOS, H. J. M. **A Matemática Grega**. Coleção Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo. Unidade 1. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985, c1974.

_____. **A Newton e Leibniz**. Coleção Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo. Unidade 3. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985, c1974.

_____. **Indivisíveis e Infinitésimos**. Coleção Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo. Unidade 2. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985, c1974.

_____. **O Cálculo no Século XVIII: Fundamentos**. Coleção Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo.

Unidade 4. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985, c1974.

. **O Cálculo no Século XVIII:** Técnicas e Aplicações. Coleção Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo. Unidade 5. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985, c1974.

BARROW I; CHILD J. M. **The Geometrical lectures of Isaac Barrow.** Translation, Notes, Proofs and A Discussion on the Advance Made Therein on the Work of his Predecessors in the Infinitesimal Calculus J. M. Child. London: The Open Court Publishing Company, 1916.

BITBOL, M. **De la methode:** recherches en histoire et philosophie des mathematiques. 2. ed., rev. et augm. Besançon: Presses Universitaires Franche-Comte, 2011.

BOCKSTAELE, . La theorie des tangentes aux coubes algebriques dans l'oeuvre de Rene-François de Sluse. In: **Colloque International 'Rene François de Sluse' (1622-1685).** Liege: Soc. Royale des Sciences, 1986. p.138-144.

BONDÍA, J. L. Notas sobre a experiência e o saber da experiência. **Revista Brasileira de Educação,** Rio de Janeiro, n. 19, p. 20-28, jan/fev/mar/abr. 2002.

BOS, H. J. M. The significance of Sluse's Mesolabum within seventeenth-century Geometry and algebra. In: **Colloque International 'Rene Francois de Sluse' (1622-1685)**. Liege: Soc. Royale des Sciences, 1986. p.145-166

_____. **Lectures in the history of mathematics**. Providence: American Mathematical Society; London: London Mathematical Society, 1993.

BOULIGAND, G.; DESBATS, J. **La mathématique et son unité**. Paris: Payot, 1947.

BOURBAKI, N. **Éléments d'histoire des mathématiques**. Paris: Hermann, 1960.

BRASSINE, E.; FERMAT, P. DE. **Précis des œuvres mathématiques**. Sceaux: Éditions Jacques Gabay, 1989.

BROWN, R. C. **The tangled origins of the Leibnizian calculus: a case study of a mathematical revolution**. Hackensack: World Scientific, 2012.

BRUNSCHVICG, L. **Les étapes de la philosophie mathématique**. Paris: Librairie Félix Alcan, 1912.

CAVALIERI, B. **Exercitationes Geometricae Sex**. Bologna: Bononiae Typis Jacobi Montij, 1647.

CORREIA, M. C. L. F.; PINTO, M. DO R. M. L. S. **Diferentes abordagens ao estudo das cônicas**. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores). Departamento de Matemática da

Universidade do Porto. Porto: Universidade do Porto, 2013.

COUSIN, V. Roberval Philosophe. In: **Journal des Sçavants**, 1845, p.129–149.

COUTINHO, S. C. **Números inteiros e criptografia RSA**. Coleção Computação e Matemática. Rio de Janeiro: SBM e IMPA, 2000.

DELEUZE, G.; GUATTARI, F. **Mil Platôs. Capitalismo e Esquizofrenia**. Rio de Janeiro: Editora 34, 2014. Vol. 1.

_____. **Mil Platôs. Capitalismo e Esquizofrenia**. Rio de Janeiro: Editora 34, 2014. Vol. 2.

_____. **Mil Platôs. Capitalismo e Esquizofrenia**. Rio de Janeiro: Editora 34, 2014. Vol. 3.

_____. **Mil Platôs. Capitalismo e Esquizofrenia**. Rio de Janeiro: Editora 34, 2014. Vol. 5.

D'AMBROSIO, U. **Cálculo e Introdução à Análise**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.

DESCARTES, R. **A Geometria**. Tradução, Introdução e Notas Raquel Anna Sapunaru. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

DEVLIN, K. J. **The unfinished game: Pascal, Fermat, and the seventeenth-century letter that made the world modern**. New York: Basic Books, 2008.

DIJKSTERHUIS, E. J. **Archimedes**. Princeton: Princeton University Press, 1987.

EDWARDS, C. H. **The historical development of the calculus**. New York: Springer -Verlag, 1979.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e Introdução Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

FERMAT, P. DE; TENNERY, P. **Oeuvres de Fermat**. Traduction Paul Tannery. Edition Paul Tannery et Charles Henry. Paris: Gautier-Yillars et Fils, 1896. Tomo III.

FILHO, D. C. DE M. **Manual de Redação Matemática**. Rio de Janeiro: SMB, 2014.

FOUCALT, M. **A Escrita de si: O que é um autor?** Lisboa: Passagens, 1992.

_____. **A Arqueologia do Saber**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2009.

GARDIES, J. L. **Pascal entre Eudoxe et Cantor**. Paris: J. Vrin, 1984.

GIUSTI, E. **Bonaventura Cavalieri and the Theory os Indivisibles**. Bologna: Cremonese, 1980.

GOLDSTEIN, C.; et al. **L'Europe mathématique: histoires, mythes, identités**. Paris: EDS, 1996.

GRABINER, J. V. **A historian looks back: the calculus as algebra and selected writings**. Washington: Mathematical Association of America, 2010.

GUIDORIZZI, H. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

HEATH T. **A history of greek mathematics**: from Thales to Euclid. Oxford: Clarendon Press, 1921. Vol. 1.

_____. **A history of greek mathematics**: from Aristarcus to Diophantus. Oxford: Clarendon Press, 1921. Vol. 2.

HUYGENS, C. **Oeuvres complètes de Christiaan Huygens**. La Haye: M. Nijhoff, 1888. Vol. 10.

KATZ, M. G.; et al. **Almost equal**: Method of adequality from Diophantus to Fermat and beyond. 2012. Disponível em: <<http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:qo2iMc4UY-kj:arxiv.org/abs/1210.7750+&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br>> Último Acesso: 31 out 2015.

LEIBNIZ, G. W.; PEYROUX, J. **Oeuvre concernant le calcul infinitésimal**: suivi du recueil de diverses pièces sur la dispute entre Leibnitz et Newton d'après Desmaiseux et de fragments du traité des sinus du quart de cer. Bordeaux: Bergeret, Paris: Diffusé par A. Blanchard, 1983?.

LEIBNIZ, G. W; PASCAL, B; PEYROUX, J. **Oeuvre mathématique autre que le calcul infinitésimal**. Paris: A. Blanchard, 1986.

LEIBNIZ, G. W. **Naissance du calcul différentiel**: 26 articles des Acta eruditorum. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1995.

LEIBNIZ, G. W.; GERHARDT, C. I. **G. W. Leibniz Die Philosophischen Schriften.** Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1978.

_____. **G. W. Leibniz Die Mathematische Schriften.** Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1971.

LEVY, T. S. **A experiência do fora: Blanchot, Foucault e Deleuze.** Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2011.

LISPECTOR, Clarice. **A Hora da Estrela.** Rio de Janeiro: Rocco, 1998.

_____. **Água viva.** São Paulo: Hamburg, 1976.

_____. **Felicidade Clandestina.** Rio de Janeiro: Rocco, 1998.

MAHONEY, M. S. **The mathematical career of Pierre de Fermat (1601-1665).** Princeton: Princeton University Press, 1973.

_____. Greek Geometrical Analysis. In: MARIE, M. (Ed.) **Histoire des Sciences mathématiques et physiques.** Nendeln: Kraus Reprint, 1977.

_____. Barrow's mathematics: between ancients and moderns. In: FEINGOLD, M.(org.) **Before Newton: the life and times of Isaac Barrow.** Cambridge: Cambridge University Press, 1990. p.179-249..

MÁRQUEZ, Gabriel García. **Cem anos de solidão.** Tradução de Eric Nepomuceno. 89 ed. Rio de Janeiro: Record, 2015.

MICHAUD, L. G. **Biographie universelle ancienne et moderne:** histoire par ordre alphabétique de la vie publique et privée de tous les hommes. Paris: A. Thoissnier Desplaces, 1843. Vol. 20.

_____. **Biographie universelle ancienne et moderne:** histoire par ordre alphabétique de la vie publique et privée de tous les hommes. Paris: A. Thoissnier Desplaces, 1843. Vol. 21

_____. **Biographie universelle ancienne et moderne:** histoire par ordre alphabétique de la vie publique et privée de tous les hommes. Paris: A. Thoissnier Desplaces, 1843. Vol. 23

_____. **Biographie universelle ancienne et moderne:** histoire par ordre alphabétique de la vie publique et privée de tous les hommes. Paris: A. Thoissnier Desplaces, 1843. Vol. 24

_____. **Biographie universelle ancienne et moderne:** histoire par ordre alphabétique de la vie publique et privée de tous les hommes. Paris: A. Thoissnier Desplaces, 1843. Vol. 33

_____. **Biographie universelle ancienne et moderne:** histoire par ordre alphabétique de la vie publique et privée de tous les hommes. Paris: A. Thoissnier Desplaces, 1843. Vol. 34

MONNA, A. F. **L'algébrisation de la mathématique:** réflexions historiques. Utrecht: Mathematisch

Instituut der Rijksuniversiteit Utr, 1977.

NAHIN, P. J. **When least is best:** how mathematicians discovered many clever ways to make things as small (or as large) as possible. Princeton: Princeton University Press, 2004.

NEWTON, I. **Correspondence.** Cambridge: Cambridge University Press, 1959. Vol. III.

_____. **The Principia (Mathematical Principles of Natural Philosophy)** Los Angeles: University of California Press, 1999.

_____. **The method of fluxions and infinite series.** London: Printed by Henry Woodfall, 1736.

PAPPUS; VER ECKEL, P. **La collection mathématique.** Traduction, Introduction et Notes Paul Ver Eecke. Paris: A. Blanchard, 1982. Vol. 1, Livro II; Vol. 2., Livro VII.

PASCAL, B. **Oeuvres Complète de Blaise Pascal.** Paris: Librairie Hachette, 1872.

PASCAL, B.; BEAUFRETON, M. **Les lettres de Blaise Pascal:** accompagnées de lettres de ses correspondants. Paris: Les Editions Les Crès, 1922.

PERKINS, D. **Calculus and its origins.** Washington: Mathematical Association of America, 2012.

PICKOVER, C. A. **The math book:** from Pythagoras to the 57th dimension, 250 milestones in the history of mathematics. New York: Sterling Pub, 2009.

POE, E. A. O coração delator. In: COSTA, F. De M. (org). **Os melhores contos de loucura**. Rio de Janeiro: Ediouro, 2007.

RAMOS, Graciliano. **Linhas Tortas**: obra póstuma. 22ª ed. Rio de Janeiro; São Paulo: Record, 2015.

RANCIÈRE, Jacques. **A partilha do sensível**: estética e política. Tradução de Mônica Costa Neto. 2ª ed. São Paulo: EXO experimental e Editora 34, 2009.

RIGAUD, S. P.; BARROW, I.; FLAMSTEED, J.; WALLIS, J.; NEWTON, I. **Correspondence of scientific men of the seventeenth century; including letters of Barrow, Flamsteed, Wallis, and Newton**. Printed from the originals in the collection of the Right Honourable the Earl of Maccle. Oxford: University press, 1841.

ROBERVAL, G. P. DE. **Divers ouvrages de G. P. de Roberval**. Paris: Publ. par l'Académie royale des sciences, ?.

_____. **Traité des Indivisibles**. Preface Jean-Luc Verley. Paris: Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques de l'Université Paris 7, 1987.

ROBSON, E.; STEDALL, J. A. **The Oxford handbook of the history of mathematics**. Oxford: Oxford University Press, 2009.

SASAKI, C. **Descartes's mathematical thought**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.

- SCHUBRING, G. **Conflicts Between generalization, rigor, and intuition**: number concepts underlying the development of analysis in 17th-19th century France and Germany. New York: Springer-Verlag, 2005.
- SCOTT, J. F. **A history of mathematics**: from antiquity to the beginning of the nineteenth century. 2nd. ed. London: Taylor & Francis, 1969.
- SCRIBA, C. J. Mercator's Kinckhuysen - Translation in the Bodleian Library at Oxford. In: **The British Journal for the History of Science**, 2, p.45-58. 1964.
- SIMMONS, G. F.; HARIKI, S. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: 1987. McGraw-Hill. Vol. 1.
- SINEGRE, L.; BKOUCHE, R. **Histoire du calcul, de la geometrie a l'algebre**. Paris: Vuibert; Commission Inter-IREM de geometrie, IREM de Rouen, 2009.
- SMITH, D. E. **History of mathematics**. New York: Dover, 1951.
- STEDALL, J. A. **A discourse concerning algebra**: English algebra to 1685. Oxford: Oxford University Press, 2002.
- _____. **Mathematics emerging**: a sourcebook. Oxford: Oxford University Press, 2008.
- STILLWELL, J. **Mathematics and its history**. New York: Springer-Verlag, 1989.
- TATON, R. **Histoire du calcul**. 5. ed. Paris: Presses Universitaires de France, 1969.

TODHUNTER, I. **A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace.** New York: Chelsea, 1949.

VAN MAANEN, J. A. **Hendrick van Heuraet (1634-1660?)**: his life and mathematical work. Utrecht: University of Utrecht, Department of Mathematics, 1983.

VERLEY, J. L. Autour de la cycloid. In: **Congrès “MATH.en.JEANS”**, maio de 1994, p.215-229.

WALKER, E. **A study of the Traité des Indivisibles de G. P. de Roberval.** New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1932.